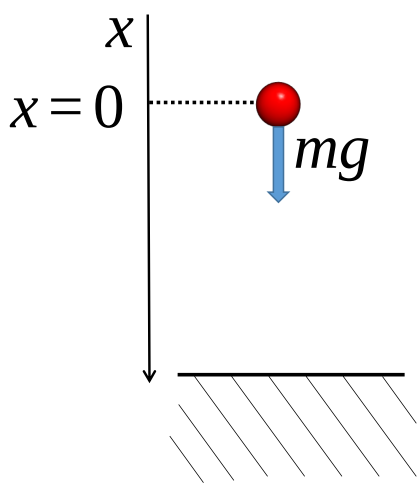
物理学入門　第１回　運動方程式

2020 年 5 月 15 日　　担当：佐藤 純

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ 手に持った質量 m の物体を高所からそっと手を放し，初速度ゼロで自由落下させる．鉛直下向きに x 軸をとり，物体の初期位置 (手を放した位置) を $x=0$ とする．重力加速度は g とし，質量 m の物体には重力 mg が鉛直下向きに働くとする．空気抵抗の影響は無視する．

(1-1) 問題設定の状況と座標軸が視覚的にわかるように図示せよ．



(1-2) 手を放した瞬間 ($t=0$) に物体に働く力 F を求めよ．　$\boxed{F=mg}$

(1-3) 落下中に物体に働く力 F を求めよ．　$\boxed{F=mg}$

(1-4) 物体の運動方程式を立てよ．　$\boxed{ma=mg}$

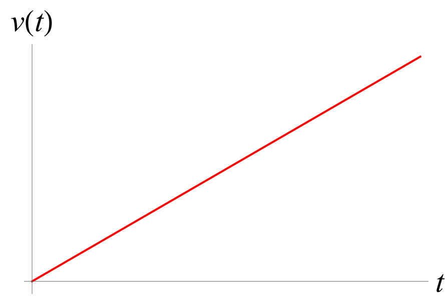
(1-5) 手を放した瞬間 ($t=0$) の物体の位置 $x(0)$，速度 $\dot{x}(0)$，加速度 $\ddot{x}(0)$ を求めよ．

$\boxed{x(0)=0, \dot{x}(0)=0, \ddot{x}(0)=g}$

(1-6) 運動方程式を一回積分することにより，物体の速度を時間の関数として表し，グラフを描け．

$$v=\int a\mathrm{d}t=\int g\mathrm{d}t=gt+C$$

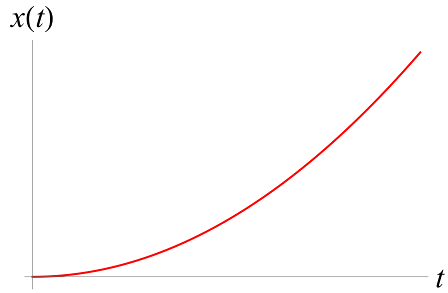
$t=0$ で $v=0$ より，$C=0$．したがって，$\boxed{v(t)=gt}$



(1-7) 運動方程式をもう一回積分することにより，物体の位置を時間の関数として表し，グラフを描け．

$$x = \int v\mathrm{d}t = \int gt\mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2 + C$$

$t=0$ で $x=0$ より，$C=0$．したがって，$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}gt^2}$

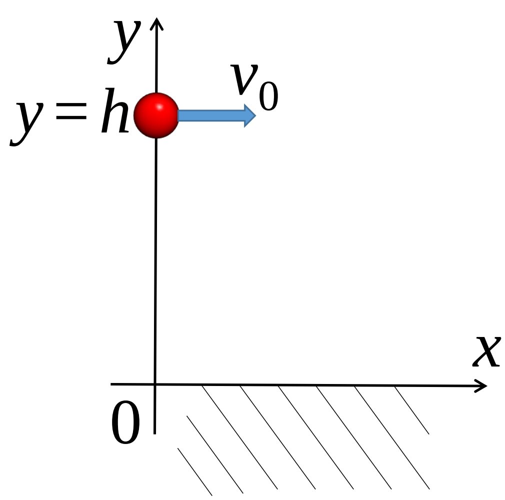


問題 2 地上からの高さが h の地点から，水平に初速度 v_0 で質量 m の物体を発射する．重力加速度は g とし，質量 m の物体には重力 mg が鉛直下向きに働くとする．空気抵抗の影響は無視する．

(2-1) 物体の運動を記述するのに適切な座標軸を設定せよ．

例えば，水平で初速度の方向に x 軸，鉛直上方に y 軸をとり，初期位置を $(x, y) = (0, h)$ とする．(次問解答図参照)

(2-2) 問題設定の状況と座標軸が視覚的にわかるように図示せよ．



(2-3) 物体に働く力ベクトル $\overrightarrow{F}$ を求めよ．

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

(2-4) 時刻 t における物体の位置ベクトルを $\vec{r}(t)$ として，運動方程式を立てよ．

$$m\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad m\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

など（色々な書き方がある）

(2-5) 運動方程式の各成分を一回積分することにより，物体の速度ベクトルを時間の関数として表せ.

$$v_x = \int a_x \mathrm{d}t = C$$

となる．$t = 0$ で $v_x = v_0$ より，$C = v_0$ なので，

$$v_x = v_0.$$

$$v_y = \int a_y \mathrm{d}t = -gt + D$$

となる．$t = 0$ で $v_y = 0$ より，$D = 0$ なので，

$$v_y = -gt.$$

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix}}$$

(2-6) 運動方程式の各成分をもう一回積分することにより，物体の位置ベクトルを時間の関数として表せ.

$$x = \int v_x \mathrm{d}t = \int v_0 \mathrm{d}t = v_0 t + C$$

となる．$t = 0$ で $x = 0$ より，$C = 0$ なので，

$$x = v_0 t.$$

$$y = \int v_y \mathrm{d}t = \int (-gt) \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + D$$

となる．$t = 0$ で $y = h$ より，$D = h$ なので，

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

$$\boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ h - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}}$$

(2-7) 地上に落下する時間と，水平到達距離を求めよ.

地上に落下する時間を求めるには，$y = 0$ となる t を求めればよい．

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

を t について解いて，

$$t = \boxed{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

また，そのとき x は，$x(t) = v_0 t$ に上で求めた落下時間を代入して，

$$x = \boxed{v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$