

問題 1 バネの上端を天井に固定し、下端に質量 m のおもりをぶら下げると、バネは自然長よりも少し伸びて、つり合いの位置で静止する。鉛直下向きに x 軸をとり、バネの上端（天井）の座標を $x = 0$ とする。おもりを下に引っ張って、つり合いの位置からさらにバネを a だけ伸ばす。そして、時刻 $t = 0$ にそっと手を放し、おもりを上下に振動させる。バネ自身の質量、空気抵抗は無視し、バネ定数を k 、バネの自然長を ℓ とする。

- (1-1) 時刻 t におけるおもりの位置を $x(t)$ とする。時刻 t におけるバネの伸びはどれだけか。
- (1-2) おもりの運動方程式（おもりの位置 $x(t)$ に対する微分方程式）を立てよ。
- (1-3) $x(t)$ に対する初期条件 $x(0)$ および $\dot{x}(0)$ を書け。
- (1-4) $y(t) = x(t) - \ell - \frac{mg}{k}$ とし、 $y(t)$ に対する微分方程式を導け。ただし、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおいて式を整理せよ。
- (1-5) $y(t)$ に対する微分方程式を解き、一般解を求めよ。
- (1-6) $y(t)$ に対する初期条件 $y(0)$ および $\dot{y}(0)$ を書け。
- (1-7) この初期条件のもとに積分定数を決定し、 $y(t)$ を求めよ。
- (1-8) おもりの位置 $x(t)$ を求めよ。
- (1-9) 横軸を時刻 t 、縦軸をおもりの位置 $x(t)$ として、グラフを描け。

問題 2 糸の先におもりをつけ、他端を天井に固定して吊るす。糸の質量は無視し、おもりは鉛直面内で振動するとする。

糸の固定点を通る上向きの鉛直線を y 軸、おもりの最も低くなる点を原点とし、原点から水平方向に x 軸をとる。（図を参照）。

糸の長さを ℓ 、おもりの質量を m とし、 xy 面内の運動を考える。

- (2-1) 単振り子の糸が y 軸となす角を θ とする。（図を参照）。おもりの位置座標 (x, y) を θ を用いて表せ。
- (2-2) 上式を時間微分することにより、 \ddot{x}, \ddot{y} を $\dot{\theta}, \ddot{\theta}$ の式で表せ。
- (2-3) 重力加速度を g 、糸の張力を T とし、おもりの運動方程式を立てよ。
- (2-4) 上式から糸の張力 T を消去し、 θ に対する微分方程式を導け。
- (2-5) 振り子の振り幅が十分小さいとき、振り子の運動は単振動になることを示し、振動の周期を求めよ。

