相転移物理学　期末レポート

担当：佐藤 純

問題 1 2 変数関数 $f(x,y)$ が，任意の正の実数 b に対して

$$f(b^\alpha x, b^\beta y) = b^\gamma f(x,y) \tag{1}$$

を満たす（スケーリング則）ことは分かっているが，具体的な f の関数形は未知とする．

(1-1) スケーリング則により，$f(x,y)$ は実質 1 変数関数となる．すなわち，x と y から新しい変数 $z := y^\alpha/x^\beta$ を導入することにより，1 変数関数 $g(z)$ を使って

$$f(x,y) = x^{\frac{\gamma}{\alpha}} g(z) \tag{2}$$

と表される．これを示し，関数 $g(z)$ を f を用いて具体的に書け．

スケーリング則を用いて，2 変数のうち片方を 1 にして潰してしまう．すなわち，$b^\alpha x = 1$ となるように b を選ぶ．$b = x^{-1/\alpha}$ を式 (1) に代入すると

$$f(x,y) = x^{\gamma/\alpha} f(1, x^{-\beta/\alpha} y) = x^{\gamma/\alpha} f\left(1, \left(y^\alpha/x^\beta\right)^{1/\alpha}\right) \tag{3}$$

となるので，$f(x,y)$ は，1 変数関数

$$\boxed{g(z) := f\left(1, z^{1/\alpha}\right)} \tag{4}$$

を用いて

$$f(x,y) = x^{\gamma/\alpha} g(y^\alpha/x^\beta) \tag{5}$$

と表される．

(1-2) したがって，$x = x_0$ での $f(x_0, y)$ さえ分かってしまえば，任意の (x,y) での $f(x,y)$ が決定してしまう．$h(y) := f(x_0, y)$ を既知として，まず $g(z)$ を決定し，続けて $f(x,y)$ を求めよ．

式 (1) に $x = 1$, $y = z^{1/\alpha}$ を代入すると

$$g(z) = b^{-\gamma} f(b^\alpha, b^\beta z^{1/\alpha}) \tag{6}$$

となる．ここで，$b^\alpha = x_0$ となるように b を選ぶ．$b = x_0^{1/\alpha}$ を式 (6) に代入して

$$\boxed{g(z)} = x_0^{-\gamma/\alpha} f(x_0, x_0^{\beta/\alpha} z^{1/\alpha}) = \boxed{x_0^{-\gamma/\alpha} h(x_0^{\beta/\alpha} z^{1/\alpha})} \tag{7}$$

を得る．これを用いて $f(x,y)$ は，

$$\boxed{f(x,y)} = x^{\gamma/\alpha} g(y^\alpha/x^\beta) = x^{\gamma/\alpha} x_0^{-\gamma/\alpha} h\left(x_0^{\beta/\alpha} (y^\alpha/x^\beta)^{1/\alpha}\right) \tag{8}$$

$$= \boxed{(x/x_0)^{\gamma/\alpha} h\left(y/(x/x_0)^{\beta/\alpha}\right)} \tag{9}$$

と求まる．

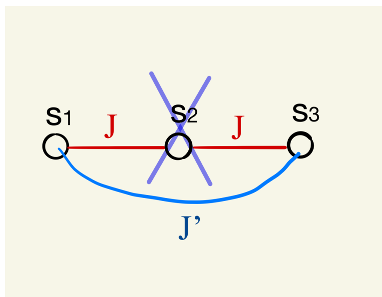
$\boxed{\textbf{問題 2}}$ くりこみ群変換の具体例として，磁場のない 1 次元イジング模型

$$\mathcal{H} = -J\sum_i s_i s_{i+1} \tag{10}$$

を考える．$J > 0$ とし，各スピン変数 s_i は $+1$ または -1 の 2 通りの値を取るとする．

偶数番目のスピン $s_2, s_4, s_6, \cdots$ を潰して粗視化し，奇数番目のスピンからなる新しい系を作る．簡単のため，隣接する 3 スピン s_1, s_2, s_3 に注目し，s_2 を潰して新しいハミルトニアン $\mathcal{H}'$ を作る．粗視化によって結合定数は $J \to J'$ と変化するとする．

$$\mathcal{H}(s_1, s_2, s_3) = -J(s_1 s_2 + s_2 s_3), \tag{11}$$
$$\mathcal{H}'(s_1, s_3) = -J' s_1 s_3 \tag{12}$$



元の系の分配関数 Z と，粗視化後の分配関数 Z' は

$$Z = \sum_{s_1, s_2, s_3} e^{-\beta\mathcal{H}(s_1, s_2, s_3)} = \sum_{s_1, s_2, s_3} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3)}, \tag{13}$$
$$Z' = \sum_{s_1, s_3} e^{-\beta\mathcal{H}'(s_1, s_3)} = \sum_{s_1, s_3} e^{K' s_1 s_3} \tag{14}$$

と書ける．ただし，$K := \beta J$, $K' := \beta J'$ とおいた．

(2-1)

$$Z = \sum_{s_1, s_3} Z(s_1, s_3), \qquad Z' = \sum_{s_1, s_3} Z'(s_1, s_3) \tag{15}$$

と書いたとき，$Z'(s_1, s_3)$ が $Z(s_1, s_3)$ に比例するという条件から，K と K' の間に成り立つ関係式を導け．

$$Z = \sum_{s_1, s_2, s_3} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3)} \tag{16}$$
$$= \sum_{s_1, s_3} \sum_{s_2} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3)} \tag{17}$$
$$= \sum_{s_1, s_3} \left(e^{K(s_1(+1) + (+1)s_3)} + e^{K(s_1(-1) + (-1)s_3)}\right) \tag{18}$$
$$= \sum_{s_1, s_3} \left(e^{K(s_1 + s_3)} + e^{-K(s_1 + s_3)}\right) \tag{19}$$

より

$$Z(s_1, s_3) = e^{K(s_1+s_3)} + e^{-K(s_1+s_3)} \tag{20}$$

である．これが

$$Z'(s_1, s_3) = e^{K' s_1 s_3} \tag{21}$$

に比例するので，比例定数を A として

$$e^{K(s_1+s_3)} + e^{-K(s_1+s_3)} = A e^{K' s_1 s_3} \tag{22}$$

と書ける．s_1, s_3 に ± 1 を代入して

$$e^{2K} + e^{-2K} = A e^{K'} \qquad (s_1, s_3) = (1,1), (-1,-1) \tag{23}$$

$$2 = A e^{-K'} \qquad (s_1, s_3) = (1,-1), (-1,1) \tag{24}$$

を得る．この両辺を割り算して，

$$\boxed{\cosh 2K = e^{2K'}} \tag{25}$$

を得る．

(2-2) 粗視化を繰り返すことによって $K \to K' \to K'' \to \cdots$ と変換されるとすると，$K > K' > K'' > \cdots$ が成り立つことを示せ．

$x > 0$ のとき $\cosh x < e^x$ なので，

$$e^{2K} > \cosh 2K = e^{2K'} \quad \Leftrightarrow \quad K > K' \tag{26}$$

が成り立つ．したがって，粗視化を繰り返すと

$$K > K' > K'' > \cdots \tag{27}$$

が成り立つ．

(2-3) 結合定数 J の方は変わらずに，(逆) 温度 $\beta := \dfrac{1}{k_B T}$ の方が変化していくと考える：$T \to T' \to T'' \to \cdots$. すると，系がどんなに低い温度であっても (絶対零度でない限りは)，粗視化を繰り返すことによって温度が無限大の系と等価になってしまうことを説明せよ．

前問の結果と $K = \beta J$ より，

$$\beta > \beta' > \beta'' > \cdots \tag{28}$$

が成り立つので，

$$T < T' < T'' < \cdots \tag{29}$$

を得る．すなわち，粗視化によってどんどん有効温度は高くなり，温度が無限大の系と等価になる．