相転移物理学　期末レポート

担当：佐藤 純

2020 年 8 月 23 日 17 時締切　　　　[問題に関する問い合わせは sato.jun@ocha.ac.jp まで]

- Moodle に提出．問題が発生したら直ちに上記メールアドレスに連絡すること．
- 期限を過ぎたものはいかなる理由でも受け付けない．余裕をもって提出すること．

注意事項：

- 2 ページ目に 問題 2 もあるので注意．
- 解答そのものよりはむしろ解答に至る考え方や途中式を採点する．
- 人に教わったり文献を調べたりした場合も，自分の中で咀嚼して，最終的には自分の言葉で自分が理解できた内容のみを書くこと．
- 完全な解答ができなくても，自分の考えたところまでを書いて提出すること．
- $a = b$ は「a と b が等しい」ことを主張し，$a := b$ は「a を b で定義する」ことを意味する．

問題 1 2 変数関数 $f(x, y)$ が，任意の正の実数 b に対して

$$f(b^\alpha x, b^\beta y) = b^\gamma f(x, y) \tag{1}$$

を満たす（スケーリング則）ことは分かっているが，具体的な f の関数形は未知とする．

(1-1) スケーリング則により，$f(x, y)$ は実質 1 変数関数となる．すなわち，x と y から新しい変数 $z := y^\alpha / x^\beta$ を導入することにより，1 変数関数 $g(z)$ を使って

$$f(x, y) = x^{\frac{\gamma}{\alpha}} g(z) \tag{2}$$

と表される．これを示し，関数 $g(z)$ を f を用いて具体的に書け．

(1-2) したがって，$x = x_0$ での $f(x_0, y)$ さえ分かってしまえば，任意の (x, y) での $f(x, y)$ が決定してしまう．$h(y) := f(x_0, y)$ を既知として，まず $g(z)$ を決定し，続けて $f(x, y)$ を求めよ．

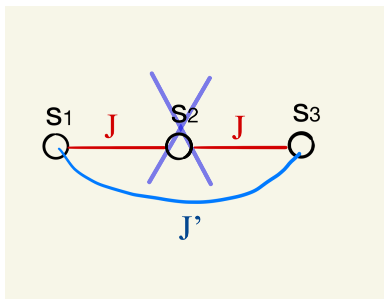
$\boxed{\textbf{問題 2}}$ くりこみ群変換の具体例として，磁場のない１次元イジング模型

$$\mathcal{H} = -J\sum_i s_i s_{i+1} \tag{3}$$

を考える．$J > 0$ とし，各スピン変数 s_i は $+1$ または -1 の２通りの値を取るとする．

偶数番目のスピン $s_2, s_4, s_6, \cdots$ を潰して粗視化し，奇数番目のスピンからなる新しい系を作る．簡単のため，隣接する３スピン s_1, s_2, s_3 に注目し，s_2 を潰して新しいハミルトニアン $\mathcal{H}'$ を作る．粗視化によって結合定数は $J \to J'$ と変化するとする．

$$\mathcal{H}(s_1, s_2, s_3) = -J(s_1 s_2 + s_2 s_3), \tag{4}$$
$$\mathcal{H}'(s_1, s_3) = -J' s_1 s_3 \tag{5}$$



元の系の分配関数 Z と，粗視化後の分配関数 Z' は

$$Z = \sum_{s_1,s_2,s_3} e^{-\beta\mathcal{H}(s_1,s_2,s_3)} = \sum_{s_1,s_2,s_3} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3)}, \tag{6}$$
$$Z' = \sum_{s_1,s_3} e^{-\beta\mathcal{H}'(s_1,s_3)} = \sum_{s_1,s_3} e^{K' s_1 s_3} \tag{7}$$

と書ける．ただし，$K := \beta J$, $K' := \beta J'$ とおいた．

(2-1)

$$Z = \sum_{s_1,s_3} Z(s_1, s_3), \qquad Z' = \sum_{s_1,s_3} Z'(s_1, s_3) \tag{8}$$

と書いたとき，$Z'(s_1, s_3)$ が $Z(s_1, s_3)$ に比例するという条件から，K と K' の間に成り立つ関係式を導け．

(2-2) 粗視化を繰り返すことによって $K \to K' \to K'' \to \cdots$ と変換されるとすると，$K > K' > K'' > \cdots$ が成り立つことを示せ．

(2-3) 結合定数 J の方は変わらずに，(逆) 温度 $\beta := \dfrac{1}{k_B T}$ の方が変化していくと考える：

$T \to T' \to T'' \to \cdots$. すると，系がどんなに低い温度であっても (絶対零度でない限りは)，粗視化を繰り返すことによって温度が無限大の系と等価になってしまうことを説明せよ．