相転移物理学　レポート 1

2020 年度前期　担当：佐藤 純

磁性体の相転移をイジング模型を用いて調べる．すなわち，N 個の微小な磁石 (=スピン) からなる系を考え，各スピンは上向きと下向きの 2 状態を取るとする．i 番目のスピンの向きを表す変数を s_i とし，上向きのとき $s_i = +1$，下向きのとき $s_i = -1$ とする．

練習 1

系全体のスピン配置は何通りあるか．

磁石の強さを表す量として，磁化 M を

$$M(s_1, s_2, \cdots, s_N) = \sum_{i=1}^{N} s_i$$

で定め，スピン配置 $(s_1, s_2, \cdots, s_N)$ を取った時のエネルギー E を

$$E(s_1, s_2, \cdots, s_N) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_{i=1}^{N} s_i$$

とする．

練習 2

$J(> 0)$ に比例する第一項と h に比例する第二項は，それぞれどのような効果を表すか？

あるスピン配置 $(s_1, s_2, \cdots, s_N)$ をとる確率 $P(s_1, s_2, \cdots, s_N)$ は，ボルツマン重率

$$e^{-\beta E(s_1, s_2, \cdots, s_N)}$$

に比例する．ただし，$\beta = \dfrac{1}{k_B T}$ は逆温度である．

練習 3

分配関数

$$Z = \sum_{s_1, \cdots, s_N = \pm 1} e^{-\beta E(s_1, s_2, \cdots, s_N)}$$

を用いて

$$P(s_1, s_2, \cdots, s_N) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(s_1, s_2, \cdots, s_N)}$$

と書けることを示せ．

この確率 $P(s_1, s_2, \cdots, s_N)$ を使って，磁化 M の期待値は

$$\langle M \rangle = \sum_{s_1, \cdots, s_N = \pm 1} P(s_1, s_2, \cdots, s_N) M(s_1, s_2, \cdots, s_N)$$

と計算される．

練習 4

磁化 M の期待値は

$$\langle M\rangle = \frac{\partial}{\partial(\beta h)}\log Z$$

と書けることを示せ．

練習 5

相互作用がない場合 $(J=0)$ の分配関数は

$$Z = (2\cosh\beta h)^N$$

と書けることを示せ．

スピンひとつ当たりの磁化 m を，$m = \dfrac{1}{N}\langle M\rangle$ で定める．

練習 6

相互作用がないとき

$$m = \tanh\beta h$$

を示せ．

次に相互作用がある場合を考える．相互作用を正確に取り扱うのは難しいので，ここでは平均場近似を考える．まず，エネルギーの式を

$$\begin{aligned}
E(s_1, s_2, \cdots, s_N) &= -J\sum_{\langle i,j\rangle} s_i s_j - h\sum_{i=1}^N s_i \\
&= -\frac{J}{2}\sum_{i=1}^N s_i \sum_{j=1}^z s_{i_j} - h\sum_{i=1}^N s_i
\end{aligned}$$

と書き換える．ここで，z はひとつのスピンが相互作用するスピンの数，s_{i_j} は s_i と相互作用するスピンを表す．ここで，s_{i_j} を平均値 m で置き換えてしまうと，

$$\begin{aligned}
E(s_1, s_2, \cdots, s_N) &\simeq -\frac{J}{2}\sum_{i=1}^N s_i \sum_{j=1}^z m - h\sum_{i=1}^N s_i \\
&= -\frac{J}{2}\sum_{i=1}^N s_i\, zm - h\sum_{i=1}^N s_i \\
&= -\frac{Jzm}{2}\sum_{i=1}^N s_i - h\sum_{i=1}^N s_i
\end{aligned}$$

となる．

練習 7

自己無撞着方程式

$$m = \tanh \beta \left(h + \frac{Jz}{2} m \right)$$

を導け.

以下，上に掲げた自己無撞着方程式を用いて磁性体の相転移を調べる.

レポート問題 1

転移温度 T_c 以下 (以上) では自発磁化を持つ (持たない) ことを示し，T_c を求めよ.

レポート問題 2

転移温度 T_c よりわずかに低い温度で生じる自発磁化は

$$m \propto (T_c - T)^\beta$$

と振る舞うことを示し，臨界指数 β を求めよ.

帯磁率 χ を

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0}$$

で定める．これは外場 h をかけたときに系がどのくらい敏感に応答するかを表す量であり,「磁石になりやすさ」を表す.

レポート問題 3

転移温度 T_c 近傍で帯磁率は非常に大きくなる．その物理的意味を簡潔に述べよ．また，その振る舞いは

$$\chi \propto |T - T_c|^{-\gamma}$$

と書かれることを示し，臨界指数 γ を求めよ.

レポート問題 4

転移温度 T_c で帯磁率が発散することに対応し，$T = T_c$ 直上では磁化 m は磁場 h に比例せず

$$m \propto h^{\frac{1}{\delta}}$$

と振る舞う．臨界指数 δ を求めよ.