基礎力学　レポート3

2019 年 12 月 20 日　担当：佐藤 純

問題 1 質量 m_1 の物体 1 が速度 v_1 で，質量 m_2 の物体 2 が速度 v_2 で，x 軸上を一次元運動している．2 つの物体ははねかえり係数 e の非弾性衝突をし，衝突後のそれぞれの速度を v_1'，v_2' とする．

(1-1) 衝突後のそれぞれの物体の速度 v_1', v_2' を求めよ．

運動量保存より，

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2, \tag{1}$$

はねかえり係数が e であることから，

$$\begin{aligned} e &= -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}, \\ v_1' - v_2' &= -e v_1 + e v_2 \end{aligned} \tag{2}$$

を得る．v_2' を消すため，v_2' の係数を揃える．$(1) + (2) \times m_2$ を計算すると，

$$\begin{aligned} M v_1' &= (m_1 - e m_2) v_1 + (m_2 + e m_2) v_2, \\ & \boxed{v_1' = \frac{m_1 - e m_2}{M} v_1 + \frac{(1+e) m_2}{M} v_2} \end{aligned}$$

v_1' を消すため，v_1' の係数を揃える．$(1) - (2) \times m_1$ を計算すると，

$$\begin{aligned} M v_2' &= (m_1 + e m_1) v_1 + (m_2 - e m_1) v_2, \\ & \boxed{v_2' = \frac{(1+e) m_1}{M} v_1 + \frac{m_2 - e m_1}{M} v_2} \end{aligned}$$

を得る．ただし，$M = m_1 + m_2$ である．

(1-2) 物体 1 と 2 が衝突によって受けた力積を求め，それらを比較せよ．

物体 1 が受けた力積は，その運動量の変化に等しく，

$$\begin{aligned} \Delta P_1 &:= m_1 v_1' - m_1 v_1 \\ &= m_1 \left(\frac{m_1 - e m_2}{M} v_1 + \frac{(1+e) m_2}{M} v_2 \right) - m_1 v_1 \\ &= m_1 \left(\frac{m_1 - e m_2}{M} - 1 \right) v_1 + \frac{(1+e) m_1 m_2}{M} v_2 \\ &= m_1 \left(\frac{m_1 - e m_2 - M}{M} \right) v_1 + \frac{(1+e) m_1 m_2}{M} v_2 \\ &= m_1 \left(\frac{m_1 - e m_2 - m_1 - m_2}{M} \right) v_1 + \frac{(1+e) m_1 m_2}{M} v_2 \\ &= m_1 \left(\frac{-(1+e) m_2}{M} \right) v_1 + \frac{(1+e) m_1 m_2}{M} v_2 \\ &= \frac{(1+e) m_1 m_2}{M} (v_2 - v_1) \\ &= \boxed{(1+e) \mu (v_2 - v_1)} \end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}\mu &:= \left(m_1^{-1} + m_2^{-1}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)^{-1} \\ &= \frac{m_1 m_2}{M} \end{aligned} \tag{3}$$

は換算質量である．

物体 2 が受けた力積は，その運動量の変化に等しく，

$$\begin{aligned}\Delta P_2 &:= m_2 v_2' - m_2 v_2 \\ &= m_2 \left(\frac{(1+e)m_1}{M} v_1 + \frac{m_2 - e m_1}{M} v_2\right) - m_2 v_2 \\ &= \frac{(1+e)m_1 m_2}{M} v_1 + m_2 \left(\frac{m_2 - e m_1}{M} - 1\right) v_2 \\ &= \frac{(1+e)m_1 m_2}{M} v_1 + m_2 \left(\frac{-m_1 - e m_1}{M}\right) v_2 \\ &= \frac{(1+e)m_1 m_2}{M} (v_1 - v_2) \\ &= \boxed{(1+e)\mu(v_1 - v_2)} \end{aligned}$$

となる．(運動量保存則により，物体 1, 2 が受けた力積の和は当然 0 となる)

(1-3) 衝突前後での重心の速度を求め，それらを比較せよ．

衝突前の重心の速度 V_G は，

$$V_G = \frac{m_1}{M} v_1 + \frac{m_2}{M} v_2$$

衝突後の重心の速度 V_G' は，

$$\begin{aligned} V_G' &= \frac{m_1}{M} v_1' + \frac{m_2}{M} v_2' \\ &= \frac{m_1}{M} \left(\frac{m_1 - e m_2}{M} v_1 + \frac{(1+e)m_2}{M} v_2\right) + \frac{m_2}{M} \left(\frac{(1+e)m_1}{M} v_1 + \frac{m_2 - e m_1}{M} v_2\right) \\ &= \frac{m_1(m_1 - e m_2) + m_2(1+e)m_1}{M^2} v_1 + \frac{m_1(1+e)m_2 + m_2(m_2 - e m_1)}{M^2} v_2 \\ &= \frac{m_1^2 + m_2 m_1}{M^2} v_1 + \frac{m_1 m_2 + m_2^2}{M^2} v_2 \\ &= \frac{m_1}{M} v_1 + \frac{m_2}{M} v_2 = V_G \end{aligned}$$

となり，重心の速度は衝突の前後で変化しない．

(1-4) 衝突によって失われた全運動エネルギーを求めよ．
また，得られた結果で $e \to 0$ および $e \to 1$ の極限をとるとどうなるか．

(解法 1) 重心の運動エネルギーは変わらないので，相対運動のエネルギー変化のみを考

えて

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}\mu\left[(v_1' - v_2')^2 - (v_1 - v_2)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\mu\left[e^2(v_1 - v_2)^2 - (v_1 - v_2)^2\right] \\ &= \boxed{-\frac{m_1 m_2}{2M}(1 - e^2)(v_1 - v_2)^2}\end{aligned}$$

を得る.

(解法 2) まともに計算すると

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left(\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m_1(v_1'^2 - v_1^2) + \frac{1}{2}m_2(v_2'^2 - v_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_1(v_1' - v_1)(v_1' + v_1) + \frac{1}{2}m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \\ &= \frac{1}{2}\Delta P_1(v_1' + v_1) + \frac{1}{2}\Delta P_2(v_2' + v_2) \\ &= \frac{1}{2}\Delta P_1(v_1' + v_1) + \frac{1}{2}(-\Delta P_1)(v_2' + v_2) \\ &= \frac{\Delta P_1}{2}(v_1' - v_2' + v_1 - v_2) \\ &= \frac{\Delta P_1}{2}(-e(v_1 - v_2) + v_1 - v_2) \\ &= \frac{\Delta P_1}{2}(1 - e)(v_1 - v_2) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e)\mu(v_2 - v_1)(1 - e)(v_1 - v_2) \\ &= -\frac{1}{2}(1 - e^2)\mu(v_1 - v_2)^2 \\ &= \boxed{-\frac{m_1 m_2}{2M}(1 - e^2)(v_1 - v_2)^2}\end{aligned}$$

を得る.

- $e = 1$ のときは運動エネルギーが保存する.
- $e = 0$ のときは，相対運動の運動エネルギーを全て失う.