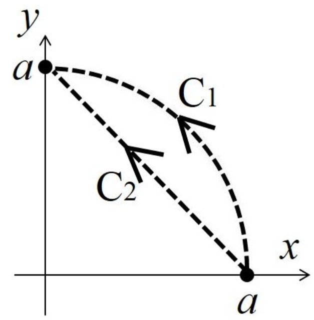
基礎力学　レポート2

2019年11月29日　　担当：佐藤 純

問題1 xy 平面内に物体があり，場所 (x,y) において物体は力 $\overrightarrow{F}(x,y) = -k\begin{pmatrix} y \\ x+a \end{pmatrix}$ を受けるとする．



(1-1) 右図中の経路 C_1 に沿って物体を運ぶのに必要な仕事 W_1 を求めよ．ただし，C_1 は半径 a の円弧を表すとする．

$$\boxed{C_1}\quad \vec{r} = a\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad \theta : 0 \to \frac{\pi}{2},\quad \mathrm{d}\vec{r} = a\mathrm{d}\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$-\overrightarrow{F} = k\begin{pmatrix} y \\ x+a\end{pmatrix} = ka\begin{pmatrix}\sin\theta \\ 1+\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = ka^2\mathrm{d}\theta(\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta) = ka^2(\cos\theta + \cos 2\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$W_1 = \int_{C_1} -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta + \cos 2\theta)\mathrm{d}\theta = ka^2\left[\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{ka^2}$$

(1-2) 右図中の直線経路 C_2 に沿って物体を運ぶのに必要な仕事 W_2 を求めよ．

$$\boxed{C_2}\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ 0\end{pmatrix} + s\left\{\begin{pmatrix}0 \\ a\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a \\ 0\end{pmatrix}\right\} = a\begin{pmatrix}1-s \\ s\end{pmatrix},\quad s : 0 \to 1,\quad \mathrm{d}\vec{r} = a\mathrm{d}s\begin{pmatrix}-1 \\ 1\end{pmatrix}$$

$$-\overrightarrow{F} = k\begin{pmatrix} y \\ x+a\end{pmatrix} = ka\begin{pmatrix} s \\ 2-s\end{pmatrix},$$

$$-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = ka\begin{pmatrix} s \\ 2-s\end{pmatrix}\cdot a\mathrm{d}s\begin{pmatrix}-1 \\ 1\end{pmatrix} = 2ka^2(1-s)\mathrm{d}s,$$

$$W_2 = \int_{C_2} -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 2ka^2\int_0^1(1-s)\mathrm{d}s = ka^2\left[2s - s^2\right]_0^1 = \boxed{ka^2}$$

(1-3) 原点を基準点として，ポテンシャル $U(x,y)$ を求めよ．(ポテンシャルが存在することは仮定してよい)

基準点 $(0,0)$ から場所 (x,y) まで運ぶのに必要な仕事 W を求めれば，それがポテンシャル $U(x,y)$ となる．この場合力 $\overrightarrow{F}(x,y)$ は保存力なので（証明なしに用いてよい），仕事は始点と終点だけで決まり，経路によらない．そこで，一番計算しやすい経路として，始点 $(0,0)$ と終点 (x,y) を結ぶ直線経路 $\mathcal{C}$ を選ぶことにする．

$$\boxed{\mathcal{C}}\quad \vec{r} = s\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix},\quad s : 0 \to 1,\quad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}s\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$$

$$-\overrightarrow{F} = k\begin{pmatrix} sy \\ sx+a\end{pmatrix},$$

$$-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = k\{sxy + y(sx+a)\}\mathrm{d}s = ky(2sx+a)\mathrm{d}s,$$

$$W_2 = \int_{\mathcal{C}} -\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = ky \int_0^1 (2sx + a)\mathrm{d}s = ky \left[xs^2 + as\right]_0^1 = ky(x + a)$$

$$\boxed{U(x, y) = k(x + a)y}$$