1　変数分離型微分方程式

1.1　解き方

以下の形の微分方程式を変数分離型微分方程式という．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)g(t) \tag{1.1}$$

すなわち，右辺が x だけの部分 $f(x)$ と，t だけの部分 $g(t)$ の積に分離している．

この場合，以下のように積分して解くことができる．

1. まず，左辺が x だけ，右辺が t だけになるよう分離する．

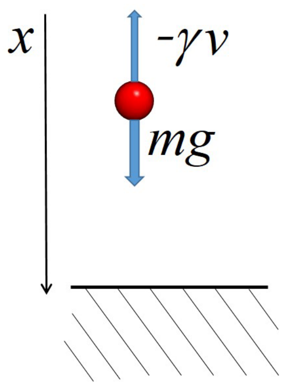
$$\frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = g(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

2. そして，積分を実行すればよい．

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \int g(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

1.2　具体例：抵抗中の運動

速度に比例する抵抗力 (比例定数を γ とする) を受けながら落下する物体の運動を考える．鉛直下向きに x 軸をとる．



運動方程式は

$$m\ddot{x} = mg - \gamma v \tag{1.4}$$

である．右辺に v があるので，左辺も v を使って書くことにより，速度 v に対する微分方程式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \gamma v \tag{1.5}$$

が得られる．右辺は v だけの関数であり，t がないので，変数分離型である．
(m, γ, g は定数)．両辺を m で割って，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\gamma}{m}v \tag{1.6}$$

となるが，定数をくくり出して v の前の係数を 1 にしておくと後の計算が楽である．

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right) \tag{1.7}$$

手順に従って，左辺を v だけの関数，右辺を t だけの関数に分離すると，

$$\frac{\mathrm{d}v}{v - \frac{mg}{\gamma}} = -\frac{\gamma}{m}\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

そして，両辺の積分を実行すればよい．

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v - \frac{mg}{\gamma}} = \int -\frac{\gamma}{m}\mathrm{d}t$$

$$\log\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma}{m}t + C \tag{1.9}$$

両辺に積分定数がつくが，移項すればひとつになるので，右辺にだけ C を加えてある．両辺を e の肩に乗せて，

$$v - \frac{mg}{\gamma} = e^{-\frac{\gamma}{m}t+C} = e^{-\frac{\gamma}{m}t}e^{C} = Ae^{-\frac{\gamma}{m}t} \tag{1.10}$$

となる．ただし，$e^C = A$ とした．

以上により，時刻 t での物体の速度が

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma} + Ae^{-\frac{\gamma}{m}t} \tag{1.11}$$

と求まった．

初期条件を $v(0) = 0$ として，積分定数 A を決定する．

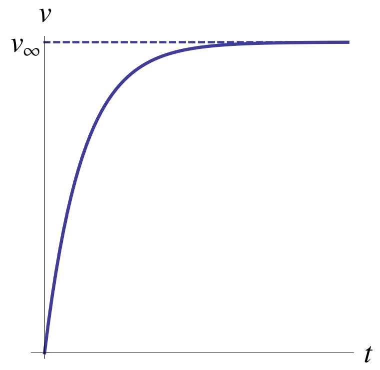
$$0 = v(0) = \frac{mg}{\gamma} + A \tag{1.12}$$

より，$A = -\frac{mg}{\gamma}$ なので，

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{mg}{\gamma} - \frac{mg}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}t} \\ &= \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \end{aligned} \tag{1.13}$$

となる．

終端速度を $v_\infty = \dfrac{mg}{\gamma}$ としてグラフを描くと



となる．最初は勢いよく加速するが，速度が増すとともに抵抗力が強まって，加速は緩やかになり，終端速度 v_∞ に飽和する．（終端速度を超えることはない）

2　2階線形定数係数微分方程式

2.1　解き方

a, b, c を定数として，微分方程式

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \tag{2.1}$$

を考える．線形方程式なので，指数関数型の解 $x = e^{\lambda t}$ を仮定する．すると，λ に対する 2 次方程式

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{2.2}$$

が得られる．これを解いて，解が $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ と得られたならば，元の微分方程式の解は

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \tag{2.3}$$

となる．ただし，A, B は積分定数である．2 次方程式の解 λ_1, λ_2 が実数か，複素数かによって，解の様子が異なってくる．

- 負の実部 $e^{-\alpha t}$：減衰
- 虚部 $e^{\mathrm{i}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t$：振動
- 負の実部＋虚部：$e^{(-\alpha+\mathrm{i}\omega)t} = e^{-\alpha t+\mathrm{i}\omega t} = e^{-\alpha t}e^{\mathrm{i}\omega t} = e^{-\alpha t}(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t)$：減衰振動

2.2　純虚数のとき：単振動

微分方程式

$$\ddot{x} + 4x = 0 \tag{2.4}$$

を，初期条件 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 6$ のもとで解く．

$x(t) = e^{\lambda t}$ とおくと，

$$\lambda^2 + 4 = 0 \tag{2.5}$$

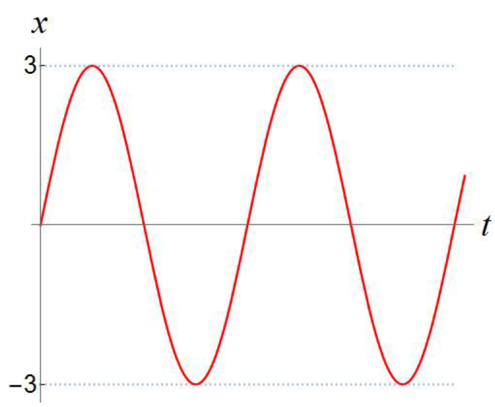
より，$\boxed{\lambda = \pm 2\mathrm{i}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t} \tag{2.6}$$

初期条件より，

$$x(t) = 3\sin 2t. \tag{2.7}$$

(詳しくは，演習問題の解答参照)



2.3　負の実部と虚部があるとき：減衰振動

微分方程式

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 13x = 0 \qquad (2.8)$$

を，初期条件 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 4$ のもとで解く．

$x(t) = e^{\lambda t}$ とおくと，

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0 \qquad (2.9)$$

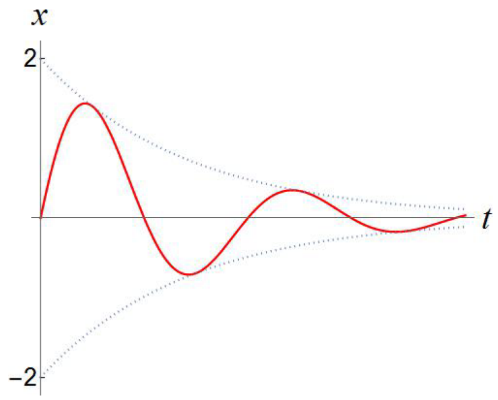
より，$\boxed{\lambda = -3 \pm 2\mathrm{i}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = e^{-3t}(A\cos 2t + B\sin 2t)} \qquad (2.10)$$

初期条件より，

$$x(t) = 2e^{-3t}\sin 2t. \qquad (2.11)$$

(詳しくは，演習問題の解答参照)



2.4　実数解のとき：過減衰

微分方程式

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 5x = 0 \qquad (2.12)$$

を，初期条件 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 4$ のもとで解く．

$x(t) = e^{\lambda t}$ とおくと，

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \qquad (2.13)$$

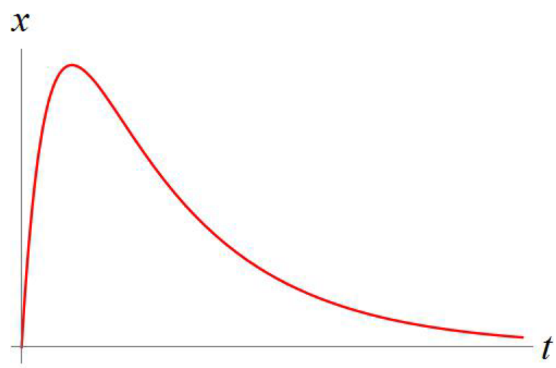
より，$\boxed{\lambda = -1, -5}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = Ae^{-t} + Be^{-5t}} \qquad (2.14)$$

初期条件より，

$$x(t) = e^{-t} - e^{-5t}. \qquad (2.15)$$

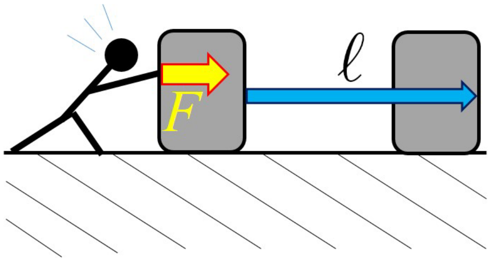
(詳しくは，演習問題の解答参照)



3　仕事とエネルギー保存則

3.1　仕事

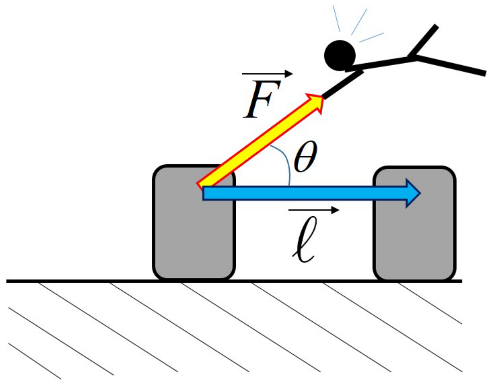
- 力の方向と物体の移動方向が同じとき



仕事 ＝ 力 × 移動距離

$$W = F\ell$$

- 力の方向と物体の移動方向が異なるとき

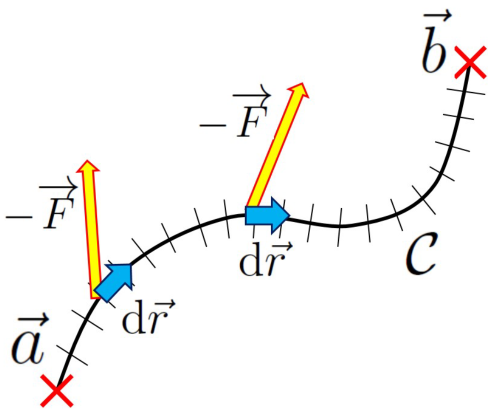


加えた力 $\vec{F}$ は，水平方向 $F\cos\theta$ と垂直方向 $F\sin\theta$ に分解されるが，物体の移動に実際に使われる成分は $F\cos\theta$ だけである．したがって，人間がした仕事量を $W = (F\cos\theta)\ell$ で定める．これは，力ベクトル $\vec{F}$ と変位ベクトル $\vec{\ell}$ の内積 $W = \vec{F}\cdot\vec{\ell}$ である．

$$\text{仕事} = \overrightarrow{\text{力}} \cdot \overrightarrow{\text{変位}}$$

$$W = \vec{F}\cdot\vec{\ell}$$

3.2　仕事と線積分



3 次元空間中を，外力を受けながら運動する物体を考える．場所 $\vec{r}$ において，物体は外力 $\vec{F}(\vec{r})$ を受けるとする．この外力に逆らって，場所 $\vec{a}$ から $\vec{b}$ まで物体を運んだとき，人間がした仕事 W を計算しよう．

物体を運んだ経路を $\mathcal{C}$ とする．この経路を細かく分割し，微小な一つの区間に注目する．

この区間における物体の微小変位ベクトルを $\mathrm{d}\vec{r}$ とする．外力 $\vec{F}(\vec{r})$ に逆らって人間が加えた力は $-\vec{F}(\vec{r})$ であるから，この微小区間でした仕事は $-\vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ である．この微小な仕事を全経路 $\mathcal{C}$ で全て足し合わせることにより，全体の仕事は

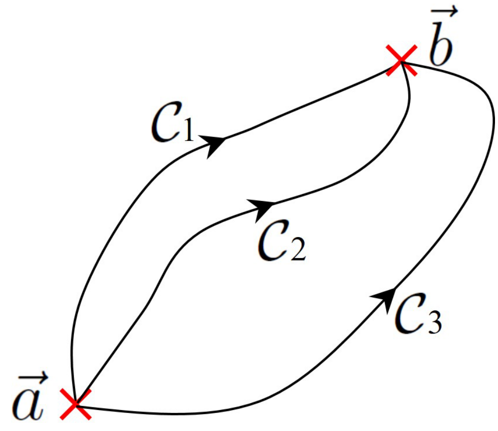
$$W(\vec{a}\to\vec{b}|\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} -\vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{3.1}$$

と求まる．この経路 $\mathcal{C}$ に沿った積分を線積分という．

3.3　保存力

外力 $\vec{F}(\vec{r})$ は場所 $\vec{r}$ によって異なるので，始点 $\vec{a}$ と終点 $\vec{b}$ を決めただけでは運ぶのに必要な仕事は決まらず，どのような経路 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \cdots$ で運ぶかによって，仕事量は異なってくる．

ところが，外力 $\vec{F}(\vec{r})$ が $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$ を満たすとき (この式は分からなくても気にしなくてよい)，仕事量は経路に依存せず，始点と終点のみから一意に定まる．このような力を，**保存力**という．



保存力 ＝ 仕事が経路に依存しない！

3.4　ポテンシャルエネルギー

場所 $\vec{a}$ から $\vec{b}$ まで外力 $\vec{F}(\vec{r})$ に逆らって人間が物体を運んだとき，

$$W(\vec{a} \to \vec{b}) = \int_{\mathcal{C}} -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{3.2}$$

だけ人間は仕事をしたことになる．外力 $\vec{F}(\vec{r})$ が保存力のとき，この仕事量は経路 $\mathcal{C}$ によらず，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ だけから決まる．

物体はこれだけの仕事を人間から受け取ったことにより，エネルギーを獲得することになる．たとえ場所 $\vec{b}$ で物体は静止していたとしても，$\vec{a}$ にいた時よりも (目に見えない形で) エネルギーが上昇している．これを，ポテンシャル (潜在的な) エネルギーという．

場所 $\vec{r}$ におけるポテンシャルエネルギーを $U(\vec{r})$ とすると，

$$U(\vec{b}) - U(\vec{a}) = W(\vec{a} \to \vec{b}) \tag{3.3}$$

となる．このように，ポテンシャルエネルギーはある地点と別の地点の「差」しか求まらない．そこで，どこかを基準点と定め（どこでもよい），そこでのポテンシャルをゼロと決める．すなわち，基準点を $\vec{a}$ として，$U(\vec{a}) = 0$ とする．すると，場所 $\vec{r}$ におけるポテンシャルエネルギーは，

$$U(\vec{r}) = W(\vec{a} \to \vec{r}) \tag{3.4}$$

で求まることになる．すなわち，場所 $\vec{r}$ におけるポテンシャルエネルギーを求めるには，基準点からその場所まで運ぶのに必要な仕事を計算すればよいことになる．

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{a} \to \vec{r}} -\vec{F}(\vec{r}') \cdot \mathrm{d}\vec{r}'$$

3.5　エネルギー保存則

保存力 $\vec{F}(\vec{r})$ を受けながら運動する質量 m の物体を考える．物体は時刻 $t = t_1$ のとき場所 $\vec{r}_1$ にいて，速度は $\vec{v}_1$ であったとする．そして，ある経路 $\mathcal{C}$ に沿って運動し，時刻 $t = t_2$ に場所 $\vec{r}_2$ に到達し，そのときの速度を $\vec{v}_2$ とする．

この物体の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{r}) \tag{3.5}$$

である．両辺を物体の軌跡 $\mathcal{C}$ に沿って積分すると，

$$\int_{\mathcal{C}} m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{3.6}$$

となる．

1．右辺

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} &= -\left(\int_{\mathcal{C}} -\vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}\right)\\ &= -\left(\int_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} -\vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}\right)\\ &= -\Big\{U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)\Big\}\\ &= U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)\end{aligned} \tag{3.7}$$

2．左辺

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ において，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ の赤い部分が $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r} &= \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}\\ &= \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}\\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\end{aligned} \tag{3.8}$$

これらの結果を合わせて，

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \tag{3.9}$$

を得る．移項することにより，

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 + U(\vec{r}_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(\vec{r}_2)}$$

これは，運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ とポテンシャルエネルギー $U(\vec{r})$ の和が任意の時刻で等しい，すなわち全力学的エネルギーが保存することを表している．

3.6　線積分の具体的な計算方法

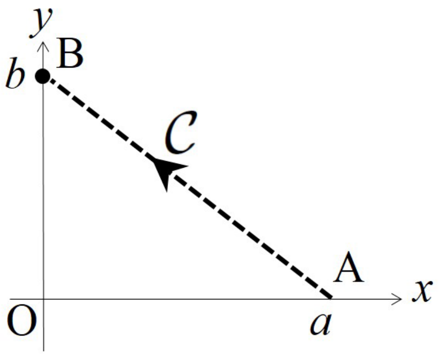
例として，外力 $\vec{F}$ に逆らって右図の経路 $\mathcal{C}$ に沿って物体を A から B まで運んだときにした仕事

$$W = \int_{\mathcal{C}} -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{3.10}$$

を計算しよう．場所 $\vec{r} = (x, y)$ で物体は外力

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k \begin{pmatrix} y \\ x + a \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

を受けるとする．



1. $\boxed{\text{経路}\,\mathcal{C}\,\text{をパラメータ表示する}}$

経路 $\mathcal{C}$ 上の点を $\vec{r}$ とすると，

$$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad (s : 0 \to 1) \tag{3.12}$$

と書ける．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ より，$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1-s) \\ bs \end{pmatrix}$ である．したがって，

$$\boxed{\mathcal{C} : \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1-s) \\ bs \end{pmatrix} \qquad (s : 0 \to 1)} \tag{3.13}$$

と経路 $\mathcal{C}$ をパラメータ s で表示できた．

2. $-\vec{F}(\vec{r})$, $\mathrm{d}\vec{r}$, $-\vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ をパラメータ s を使って表す

$$-\vec{F}(\vec{r}) = k \begin{pmatrix} bs \\ a(1-s) + a \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} bs \\ a(2-s) \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \mathrm{d}s, \tag{3.15}$$

$$-\vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = k\{bs(-a) + a(2-s)b\}\mathrm{d}s = 2kab(1-s)\mathrm{d}s \tag{3.16}$$

3. 線積分をパラメータ s に関する積分に直し，積分を実行する

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ &= \int_0^1 2kab(1-s)\mathrm{d}s \\ &= kab\left[2s - s^2\right]_0^1 \\ &= kab \end{aligned} \tag{3.17}$$

と仕事 W が求まった．