基礎力学演習　第13回　剛体の運動

2020年1月17日　　担当：佐藤 純

問題1 以下の剛体の慣性モーメントを求めよ．

(1-1) 長さ ℓ, 質量 m の棒の，中心を通って棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメント

棒は x 軸の $-\ell/2 \le x \le \ell/2$ の部分にあるとし，長さ $\mathrm{d}x$ の小部分に分割すると，

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\ell} m\right) x^2 = \left[\frac{m}{3\ell} x^3\right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \boxed{\frac{1}{12} m\ell^2}$$

(1-2) 半径 a, 質量 m の円盤の，中心を通って面に垂直な軸のまわりの慣性モーメント

まず，半径 a，質量 m の細い円環の慣性モーメントは，

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i a^2 = \left(\sum_i m_i\right) a^2 = ma^2$$

である．

円盤を細い円環に分割してその和をとれば，

$$I = \sum_i I_i = \int_0^a \frac{2\pi r \mathrm{d}r}{\pi a^2} m r^2 = \left[\frac{m r^4}{2a^2}\right]_0^a = \boxed{\frac{1}{2} m a^2}$$

(1-3) 半径 a, 質量 m の円盤の，中心を通って面に平行な軸のまわりの慣性モーメント

円盤は中心を原点とする xy 平面内にあるとし，前問の回転軸を z 軸とする．x, y, z 軸周りの慣性モーメントを I_x, I_y, I_z とする．求める慣性モーメント I は $I = I_x = I_y$ である．(円柱の対称性より $I_x = I_y$)．I_z は前問の結果より $I_z = \frac{1}{2} m a^2$．また，

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad I_x = \sum_i m_i y_i^2, \quad I_y = \sum_i m_i x_i^2,$$

より，$I_z = I_x + I_y = 2 I_x$ なので，$I_x = \frac{1}{2} I_z = \boxed{\frac{1}{4} m a^2}$

(1-4) 半径 a, 高さ ℓ, 質量 m の直円柱の，中心を通る軸のまわりの慣性モーメント

円柱の長さを ℓ とする．円柱を薄い円盤に分割してその和をとれば，

$$I = \sum_i I_i = \int_0^\ell \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}z}{\ell} m\right) a^2 = \boxed{\frac{1}{2} m a^2}$$

(1-5) 半径 a, 質量 m の球の，中心を通る軸のまわりの慣性モーメント

円の中心を通るように z 軸をとり，z 軸に垂直な断面で厚さ $\mathrm{d}z$ の薄い円盤に球を分割する．円盤の半径を r とすると，円盤の体積は $\pi r^2 \mathrm{d}z$ なので，円盤の質量は

$$\frac{\pi r^2 \mathrm{d}z}{\frac{4}{3}\pi a^3} m = \frac{3mr^2 \mathrm{d}z}{4a^3}$$

であるので，円盤の慣性モーメントは

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3mr^2 \mathrm{d}z}{4a^3}\right) r^2 = \frac{3m}{8a^3} r^4 \mathrm{d}z$$

となる．また，$r^2 = a^2 - z^2$ が成り立つことに注意して，円盤の慣性モーメントを足し合わせて球の慣性モーメントを計算すると，

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^{a} \frac{3m}{8a^3} r^4 \mathrm{d}z = \frac{3m}{8a^3} \int_{-a}^{a} (a^2 - z^2)^2 \mathrm{d}z = \frac{3m}{8a^3} \int_{-a}^{a} (a^2 - z^2)^2 \mathrm{d}z \\ &= \frac{3m}{4a^3} \int_{0}^{a} (a^2 - z^2)^2 \mathrm{d}z = \frac{3m}{4a^3} \int_{0}^{a} (z^4 - 2a^2 z^2 + a^4) \mathrm{d}z = \frac{3m}{4a^3} \left[\frac{1}{5} z^5 - \frac{2}{3} a^2 z^3 + a^4 z\right]_0^a \\ &= \frac{3ma^2}{4a} \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \boxed{\frac{2}{5} ma^2} \end{aligned}$$

問題 2 一様な球が斜面を転がり落ちる加速度は，滑り落ちる加速度の何倍か？円柱の場合も同様に調べ，どちらが速いか比較せよ．

滑り落ちるときの斜面下向き方向の運動方程式は $m\ddot{x} = mg \sin\theta$ なので，加速度は $\ddot{x} = g \sin\theta$ である．転がり落ちるときは，慣性モーメントを I，回転角を θ，摩擦力を f として，並進，回転の運動方程式を書くと，

$$m\ddot{x} = mg \sin\theta - f, \quad I\ddot{\theta} = af$$

となり，f を消去すると $ma\ddot{x} = mga \sin\theta - I\ddot{\theta}$ となるが，滑らずに回転するときは $x = a\theta$ が成り立つので，$(ma^2 + I)\ddot{x} = mga^2 \sin\theta$ となる．ここで，慣性モーメントを $I = ma^2 I_0$ と書くと，$\ddot{x} = (1 + I_0)^{-1} g \sin\theta$ となり，滑り落ちる加速度 $g \sin\theta$ の $(1 + I_0)^{-1}$ 倍になることが分かる．球のときは $I_0 = \dfrac{2}{5}$ より，$\boxed{\dfrac{5}{7}\text{倍}}$ になる．円柱のときは $I_0 = 1/2$ より，$\boxed{\dfrac{2}{3}\text{倍}}$ になる．

問題 3 水平な台の上の球を棒で水平方向に突いて，滑らないように転がすには，どの位置を突けばよいか？

球の半径を a，回転角を θ とする．中心から h の高さの位置を水平に力 F で突くとすると，並進，回転の運動方程式は $m\ddot{x} = F, \quad I\ddot{\theta} = Fh$ となり，F を消去すると $h = \dfrac{I\ddot{\theta}}{m\ddot{x}}$ となるが，滑らずに回転するときは $x = a\theta$ が成り立つので，$h = \dfrac{I}{ma}$ 得る．球のときは $I = \dfrac{2}{5} ma^2$ より，$\boxed{h = \dfrac{2}{5} a}$ となる．

問題 4 摩擦のある斜面に球を置き，そっと手を離した．球が滑らずに転がるためには，斜面の角度 ϕ はどんな値より小さければよいか？ただし，球の質量を m, 球の半径を a, 斜面の摩擦係数を μ とする．

慣性モーメントを I，回転角を θ，摩擦力を $f = \mu mg\cos\phi$ として，並進，回転の運動方程式を書くと，

$$m\ddot{x} = mg\sin\phi - \mu mg\cos\phi, \quad I\ddot{\theta} = \mu amg\cos\phi$$

となるが，滑らずに回転するときは $x = a\theta$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
&mI\ddot{x} = mgI(\sin\phi - \mu\cos\phi), \quad maI\ddot{\theta} = \mu a^2m^2g\cos\phi, \\
&mgI(\sin\phi - \mu\cos\phi) = \mu a^2m^2g\cos\phi, \\
&I(\sin\phi - \mu\cos\phi) = \mu ma^2\cos\phi, \\
&I(\tan\phi - \mu) = \mu ma^2, \\
&\tan\phi = \mu\left(1 + \frac{ma^2}{I}\right)
\end{aligned}$$

を得るが，球の場合 $I = \dfrac{2}{5}ma^2$ なので，より，斜面の角度が $\boxed{\phi = \tan^{-1}\dfrac{7}{2}\mu}$ を超えると滑り始める．