基礎力学演習　第12回　剛体のつり合い

2020年1月10日　　担当：佐藤 純

問題1 質量 m_1 の質点1が位置 $\vec{r}_1$ に，質量 m_2 の質点2が位置 $\vec{r}_2$ に，質量 m_3 の質点3が位置 $\vec{r}_3$ にある．重力加速度を方向も含めてベクトル $\vec{g}$ で表す．

(1-1) 重力が質点1に及ぼすトルク $\vec{N}_1$，重力が質点2に及ぼすトルク $\vec{N}_2$，重力が質点3に及ぼすトルク $\vec{N}_3$ を求めよ．

$$\vec{N}_1 = \vec{r}_1 \times (m_1 \vec{g}), \qquad \vec{N}_2 = \vec{r}_2 \times (m_2 \vec{g}), \qquad \vec{N}_3 = \vec{r}_3 \times (m_3 \vec{g})$$

(1-2) 3質点の全質量を $M := m_1 + m_2 + m_3$ として，3質点の重心の位置 $\vec{R}_G$ を求めよ．

$$\vec{R}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{M}$$

(1-3) 位置 $\vec{R}_G$ に質量 M の質点がひとつあるとき，重力がこの質点に及ぼすトルク $\vec{N}$ を求めよ．

$$\vec{N} = \vec{R}_G \times (M \vec{g})$$

(1-4) $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3$ が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned}\vec{N} = \vec{R}_G \times (M\vec{g}) &= \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{M}\right) \times (M\vec{g}) = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3) \times \vec{g} \\ &= (m_1 \vec{r}_1) \times \vec{g} + (m_2 \vec{r}_2) \times \vec{g} + (m_3 \vec{r}_3) \times \vec{g} \\ &= \vec{r}_1 \times (m_1 \vec{g}) + \vec{r}_2 \times (m_2 \vec{g}) + \vec{r}_3 \times (m_3 \vec{g}) = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3\end{aligned}$$

問題2 質量が m, 長さが a で太さが一様な棒を，水平な床の上から垂直な壁に立てかける．棒を傾けていくとき，棒と壁の角度 θ がどれだけになると滑り出すかを調べる．棒と床，棒と壁の間の静止摩擦係数をそれぞれ μ_1, μ_2 $(0 \le \mu_1 < 1,\, 0 \le \mu_2 < 1)$ とする．

(2-1) 棒が滑り始める直前のときの，床，壁が棒に及ぼす垂直抗力をそれぞれ N_1, N_2 として，水平方向のつりあいの式を書け．

$$N_2 = \mu_1 N_1$$

(2-2) 鉛直方向のつりあいの式を書け．

$$mg = \mu_2 N_2 + N_1$$

(2-3) 棒と床の接点まわりのモーメントのつり合いの式を書け．

$mg\sin\theta = 2N_2\cos\theta + 2\mu_2 N_2 \sin\theta$

(2-4) 上の 3 式から N_1, N_2, m を消去し，棒が滑り始める角度 θ を求めよ．

水平のつり合いを鉛直のつり合いの式に代入すると，

$$mg = \mu_2(\mu_1 N_1) + N_1 = N_1(1+\mu_1\mu_2)$$

となる．また，$t := \tan\theta$ とするとモーメントのつり合いの式は

$$mgt = 2N_2(1+\mu_2 t) = 2\mu_1 N_1(1+\mu_2 t)$$

となるので，最初の式とあわせて

$$\begin{aligned}
&mgt = N_1(1+\mu_1\mu_2)t = 2\mu_1 N_1(1+\mu_2 t),\\
&(1+\mu_1\mu_2)t = 2\mu_1(1+\mu_2 t),\\
&(1-\mu_1\mu_2)t = 2\mu_1,\\
&t = \frac{2\mu_1}{1-\mu_1\mu_2}
\end{aligned}$$

より，滑り始める角度は $\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\mu_1}{1-\mu_1\mu_2}\right)}$

(2-5) 滑らかな床ならば，壁がどんなに粗くても棒を立てかけることはできないことを示せ．

$\mu_1 = 0$ のとき，任意の μ_2 に対して（どんなに μ_2 が大きくても）滑り始める角度は $\theta = 0$ となる．

（注）

$\dfrac{\partial\theta}{\partial\mu_1} > 0,\quad \dfrac{\partial\theta}{\partial\mu_2} > 0$ より，床，壁ともに最大静止摩擦力になったとき，棒は滑り始める．