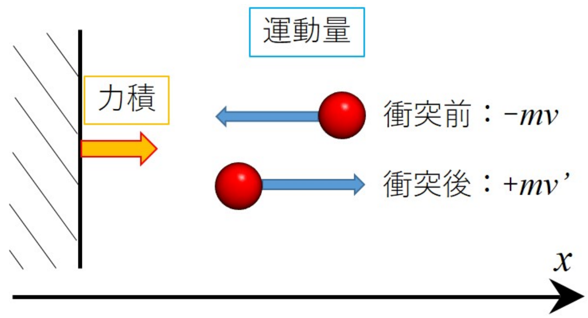
基礎力学演習　第11回　運動量と力積, 二体問題

2019年12月20日　　担当：佐藤 純

問題 1 質量 m のボールが壁に直角に速さ v で衝突し，v' の速さではねかえった．壁がボールにおよぼした撃力の力積の大きさを求めよ．

下図のように，壁がボールにおよぼした力積の方向を正の方向に座標軸をとれば，衝突後の運動量は $+mv'$，衝突前の運動量は $-mv$ なので，運動量の変化は $mv' - (-mv) = m(v + v')$ である．したがって，壁がボールに及ぼした力積は $\boxed{m(v + v')}$



問題 2 一直線上を運動する二つの球 A, B がある．質量をそれぞれ m_{A}, m_{B} とする．はじめ B が静止していて，これに A が速度 v_{A} で衝突する．衝突は完全に弾性的であるとする.（力学的エネルギーが保存する.）

(2-1) 衝突後の球の速度 V_{A}, V_{B} を求めよ．

運動量の保存より，$m_A v_A = m_A V_A + m_B V_B$ なので，

$$m_A(v_A - V_A) = m_B V_B. \tag{1}$$

また，運動エネルギーの保存より，$\frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}m_A V_A^2 + \frac{1}{2}m_B V_B^2$ なので，
$m_A(v_A^2 - V_A^2) = m_A(v_A + V_A)(v_A - V_A) = m_B V_B^2$ より，

$$m_A(v_A + V_A)(v_A - V_A) = m_B V_B^2 \tag{2}$$

となる．両辺で割り算 (2) ÷ (1) をすると，$v_A + V_A = V_B$ となる．
(跳ね返り係数 $e = -v_A/(V_A - V_B) = 1$ としても同じ式が得られる).
左辺に求めたい V_A, V_B を持ってきてまとめ直すと，

$$m_A V_A + m_B V_B = m_A v_A \tag{3}$$
$$V_A - V_B = -v_A \tag{4}$$

(i) $(3) + m_B \times (4)$

$$(m_A + m_B)V_A = (m_A - m_B)v_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}v_A}$$

(ii) $(3) - m_A \times (4)$

$$(m_A + m_B)V_B = 2m_A v_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B}v_A}$$

(2-2) $m_{\mathrm{A}} \to 0, m_{\mathrm{A}} \to \infty$ の両極限を調べ，物理的状況を述べよ．

(i) $m_{\mathrm{A}} \to 0$ $\boxed{V_A = -v_A, \quad V_B = 0}$ A は同じ速さで跳ね返り，B は動かない．

(ii) $m_{\mathrm{A}} \to 0$ $\boxed{V_A = v_A, \quad V_B = 2v_A}$

A は衝突の影響を受けず，衝突前後で速度は変わらない．
B から A の運動を見ると，A は同じ速さで跳ね返るように見える．

問題 3 質量が m_1，m_2 の 2 つのおもりを，バネ定数 k，自然長 ℓ のバネの両端につないで，机の上に置いてある．質量が m_1 のおもりを手で押さえ，質量が m_2 のおもりを引っ張ってバネを a だけ伸ばし，そっと手を離した．オモリと机の摩擦，空気抵抗などは無視できるものとする．

(3-1) おもりの運動を記述するのに適切な座標軸を設定し，2 つのおもりの運動方程式を書き下せ．

おもり 1 からおもり 2 の方向に x 軸をとり，おもりの位置をそれぞれ x_1, x_2 とする．
バネの長さは $x_2 - x_1$ となるので，バネの伸びは $x_2 - x_1 - \ell$ である．
バネが伸びているとき，おもり 1 は右向き（正の向き）に力を受ける．
バネが伸びているとき，おもり 2 は左向き（負の向き）に力を受ける．
したがって，運動方程式は以下のように書ける

$$m_1 \ddot{x_1} = +k(x_2 - x_1 - \ell)$$
$$m_2 \ddot{x_2} = -k(x_2 - x_1 - \ell)$$

(3-2) 重心座標の運動方程式を書き，これを解け．

それぞれの運動方程式を足すと

$$m_1 \ddot{x_1} + m_2 \ddot{x_2} = 0$$

となる．ここで，全質量を $M = m_1 + m_2$ とし，重心の位置を

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$$

とすると，$m_1 x_1 + m_2 x_2 = MX$ なので，

$$\boxed{M\ddot{X} = 0}$$

を得る．これを解くと

$$X(t) = At + B \quad (A, B \text{ は積分定数})$$

となる．次に，初期条件から，積分定数 A, B を決定する．まず，$X(0) = B$ である．また，$\dot{X}(t) = A$ より，$\dot{X}(0) = A$ である．一方，

- $t = 0$ で $x_1(0) = 0, x_2(0) = \ell + a$ より，$X(0) = \dfrac{m_1 x_1(0) + m_2 x_2(0)}{M} = m_2(\ell + a)/M$.
- $t = 0$ で $\dot{x_1}(0) = \dot{x_2}(0) = 0$ より，$\dot{X}(0) = \dfrac{m_1 \dot{x}_1(0) + m_2 \dot{x}_2(0)}{M} = 0$.

なので，$A=0,\ B=m_2(\ell+a)/M$ を得る．したがって，

$$\boxed{X(t)=\frac{m_2(\ell+a)}{M}}$$

(3-3) 相対座標の運動方程式を書き，これを解け．

それぞれの運動方程式を質量で割れば

$$\ddot{x}_1=+\frac{k}{m_1}(x_2-x_1-\ell) \tag{5}$$

$$\ddot{x}_2=-\frac{k}{m_2}(x_2-x_1-\ell) \tag{6}$$

引き算 (6)−(5) をすると，

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2-\ddot{x}_1&=-\frac{k}{m_2}(x_2-x_1-\ell)-\frac{k}{m_1}(x_2-x_1-\ell)\\&=-\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)k(x_2-x_1-\ell)\end{aligned}$$

より，

$$\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^{-1}(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)=-k(x_2-x_1-\ell)$$

を得る．ここで，換算質量 μ を

$$\mu=\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^{-1}=\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)^{-1}=\left(\frac{M}{m_1m_2}\right)^{-1}=\frac{m_1m_2}{M}$$

とし，相対座標を $x=x_2-x_1$ とすると，

$$\mu\ddot{x}=-k(x-\ell)$$

を得る．ここで，

$$y=x-\ell$$

を導入すれば，y と x は定数の差しかないので，$\dot{y}=\dot{x},\ \ddot{y}=\ddot{x}$ となる．

したがって，$\ddot{y}=-\dfrac{k}{\mu}y$ となり，これは単振動の運動方程式なので $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$ とおけば，$y=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ と書ける（詳細は第４回の演習問題の解答参照）ので，$x=y+\ell$ より

$$x(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t+\ell$$

を得る．次に，初期条件から，積分定数 $A,\ B$ を決定する．まず，$x(0)=B+\ell$ である．また，$\dot{x}(t)=A\omega\cos\omega t-B\omega\sin\omega t$ より，$\dot{x}(0)=A\omega$ である．一方，

- $t=0$ で $x_1(0)=0, x_2(0)=\ell+a$ より，$x(0)=x_2(0)-x_1(0)=\ell+a$.
- $t=0$ で $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ より，$\dot{x}(0)=\dot{x}_2(0)-\dot{x}_1(0)=0$.

なので，$B+\ell=\ell+a,\ A\omega=0$ より，$A=0,\ B=a$ を得る．したがって，相対座標 $x(t)$

は

$$\boxed{x(t) = a\cos\omega t + \ell}$$

となる．

(3-4) 2つのおもりの位置座標を，時間の関数として決定せよ．

重心座標 X と相対座標 x の解が得られた

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M} = \frac{m_2(\ell + a)}{M},$$
$$x = x_2 - x_1 = a\cos\omega t + \ell$$

ので，それらの式を連立させて x_1, x_2 を求める．（重心の方は両辺に M をかけて分母を払っておく）

$$m_1x_1 + m_2x_2 = m_2(\ell + a) \tag{7}$$
$$-x_1 + x_2 = a\cos\omega t + \ell \tag{8}$$

(i) $(7) - m_2 \times (8)$

$Mx_1 = m_2a(1 - \cos\omega t)$ $\boxed{x_1(t) = a\frac{m_2}{M}(1 - \cos\omega t)}$

(ii) $(7) + m_1 \times (8)$

$Mx_2 = M\ell + a(m_2 + m_1\cos\omega t)$ $\boxed{x_2(t) = \ell + a\left(\frac{m_2}{M} + \frac{m_1}{M}\cos\omega t\right)}$

(3-5) 2つのおもりの運動エネルギーの和，およびバネのポテンシャルエネルギーをそれぞれ時間の関数として求めよ．

全運動エネルギーを K とすると，$\dot{x_1} = a\omega\frac{m_2}{M}\sin\omega t, \quad \dot{x_2} = -a\omega\frac{m_1}{M}\sin\omega t$ より，

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1\left(a\omega\frac{m_2}{M}\sin\omega t\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-a\omega\frac{m_1}{M}\sin\omega t\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{M^2}a^2\omega^2\sin^2\omega t \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2(m_1 + m_2)}{M^2}a^2\omega^2\sin^2\omega t \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}a^2\omega^2\sin^2\omega t \end{aligned}$$

となる．また，$\omega^2 = \frac{k}{\mu} = k\frac{M}{m_1m_2}$ より，

$$\boxed{K = \frac{1}{2}ka^2\sin^2\omega t}$$

重心，相対座標を使えばもっと簡単にできる

$$K = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 = 0 + \frac{1}{2}\mu(-a\omega\sin\omega t)^2 = \boxed{\frac{1}{2}ka^2\sin^2\omega t}$$

バネのポテンシャルエネルギー U は，ばねの伸びは $x-\ell$ なので，

$$U = \frac{1}{2}k(x-\ell)^2 = \frac{1}{2}k(a\cos\omega t)^2 = \boxed{\frac{1}{2}ka^2\cos^2\omega t}$$

(3-6) 全力学的エネルギーを計算し，時間によらない定数になることを示せ．

全力学的エネルギーは

$$E = K + U = \boxed{\frac{1}{2}ka^2}$$

となり，時間 t によらず定数となる．