

基礎力学演習 第10回 万有引力と惑星の運動

2019年12月13日 担当：佐藤 純

問題1 有効数字1ケタの非常に大雑把な見積もりでよいので、電卓の類は使わずに以下の値を計算せよ。その際、物理量の次元を正しく書くこと。

(1-1) 地球の質量を 6×10^{24} [kg], 地球の半径を 6000[km], 地上の重力加速度を 10 [m/s²] とし、万有引力定数 G の値を見積もれ。

地球の質量を M , 地球の半径を R , 地上の重力加速度を g とすると、地上の質量 m の物体に働く重力は

$$mg = G \frac{mM}{R^2},$$

と書けるので、

$$G = \frac{gR^2}{M} = \frac{10 \times (6 \times 10^6)^2}{6 \times 10^{24}} = 6 \times 10^{1+12-24} = \boxed{6 \times 10^{-11}[\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]}$$

を得る。

(1-2) 体重 50kg の二人が、1m 離れて立っている。二人の間に働く万有引力の大きさを見積もれ。

$$F_1 = 6 \times 10^{-11} \frac{10 \times 50^2}{1^2} = 6 \times 10^{-11} \times 10 \times 2500 = 6 \times 25 \times 10^{-8} = \boxed{1.5 \times 10^{-6}[\text{N}]}$$

(1-3) 上で求めた力は、地上において体重 50kg の人に働く重力の何倍か？

$$F_2 = mg = 500[\text{N}],$$

$$F_1/F_2 = (1.5 \times 10^{-6})/(0.5 \times 10^3) = \boxed{3 \times 10^{-9}\text{倍}}$$

問題2 崖の上から物体を水平に高速で発射する。地球の半径を $R = 6000$ [km], 地上の重力加速度を $g = 10$ [m/s²] とし、以下の物理量を g, R の式で表した後、その数値を概算せよ。

(2-1) 物体が地面に落下せずに地球の周りを回り続ける最低速度 v_1 (第一宇宙速度) を求めよ。

遠心力と重力の釣り合いから、

$$m \frac{v_1^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} = mg, \quad v_1 = \boxed{\sqrt{gR}} = \sqrt{10 \times 6 \times 10^6} = \sqrt{60} \times 10^3 = \boxed{8 \times 10^3[\text{m/s}]}$$

(2-2) 物体が地球を離れて宇宙へ飛び去る最低速度 v_2 (第二宇宙速度) を求めよ。

地上における重力ポテンシャル $G\frac{mM}{R} = mgR$ の分だけ運動エネルギーを与えてやればよいから、

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgR, \quad v_2 = \sqrt{2gR} = 1 \times 10^4 [\text{m/s}]$$

問題 3 ある惑星が、太陽からの万有引力を受けて半径 R の等速円運動をしている。この時、公転周期を T とすると、

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2} \quad (= \text{あらゆる惑星に共通の定数})$$

となることを示せ。ただし、 G は万有引力定数、 M は太陽の質量である。

惑星の質量を m とすると、遠心力と重力の釣り合いから

$$mR\omega^2 = G\frac{mM}{R^2}, \quad R^3\omega^2 = GM,$$

となるが、 $\omega = 2\pi/T$ より与式を得る。