基礎力学演習　第9回　角運動量とトルク

2019 年 12 月 6 日　　担当：佐藤 純

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ 3 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を考える．以下の量は，スカラーかベクトルか，答えよ．

(1-1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　スカラー

(1-2) $\vec{a}\times\vec{b}$　　ベクトル

(1-3) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$　　ベクトル

(1-4) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$　　スカラー

(1-5) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$　　ベクトル

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ 3 次元空間内の 3 点 O, A, B の座標を, O:$(0,0,0)$, A:$(1,-3,2)$, B:$(-1,1,-2)$ とする．
ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める．

(2-1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-1)+(-3)\times1+2\times(-2)=-1-3-4=\boxed{-8}$$

(2-2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ を求めよ．

$$\begin{aligned}\vec{c}&=\begin{pmatrix}(-3)\times(-2)-2\times1\\2\times(-1)-1\times(-2)\\1\times1-(-3)\times(-1)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}6-2\\-2+2\\1-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

(2-3) 内積 $\vec{c}\cdot\vec{a}$ および $\vec{c}\cdot\vec{b}$ を計算することにより，$\vec{c}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ と直交していることを確認せよ．

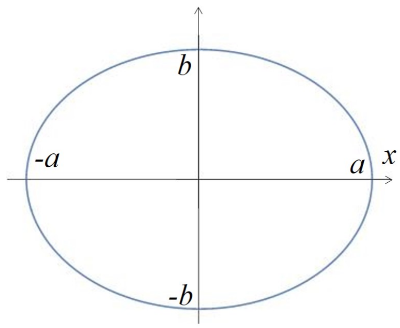
$$\vec{c}\cdot\vec{a}=1\times4+(-3)\times0+2\times(-2)=0,$$
$$\vec{c}\cdot\vec{b}=(-1)\times4+1\times0+(-2)\times(-2)=0.$$

(2-4) 三角形 OAB の面積を求めよ．

三角形 OAB の面積 $S=\dfrac{1}{2}|\vec{c}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+0^2+(-2)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{20}=\boxed{\sqrt{5}}$

$\boxed{\textbf{問題 3}}$ 質量 m の物体が xy 面内を運動している．時刻 t における物体の位置は $\vec{r}=\begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとする．

(3-1) 物体の運動の軌跡を xy 平面に図示せよ．



(3-2) 時刻 t における物体の運動量 $\overrightarrow{P}$ を求めよ．

$$\overrightarrow{P}=m\vec{v}=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}=m\omega\begin{pmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3-3) 時刻 t における物体の角運動量 $\overrightarrow{L}$ を求め，保存していることを確かめよ．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L}=\vec{r}\times\overrightarrow{P}&=\begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}\times m\omega\begin{pmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}\\ &=m\omega\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (a\cos\omega t)(b\cos\omega t)-(-a\sin\omega t)(b\sin\omega t) \end{pmatrix}\\ &=m\omega ab\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

この式は時間 t を含んでおらず，保存している．

(3-4) 時刻 t において物体に働く力を求め，中心力であることを確かめよ．

$$\overrightarrow{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{P}=-m\omega^2\begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}=-m\omega^2\vec{r}$$

より，$-\vec{r}$ の方向を向いており，中心力である．

$\boxed{\text{問題 4}}$

(4-1) 角運動量の時間変化率は，物体に働くトルクに等しいことを示せ.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times\overrightarrow{P}\right) = \dot{\vec{r}}\times\overrightarrow{P} + \vec{r}\times\dot{\overrightarrow{P}} = \vec{v}\times(m\vec{v}) + \vec{r}\times\overrightarrow{F} = m(\vec{v}\times\vec{v}) + \overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}$$

(4-2) 物体に働く力が中心力の場合，角運動量が保存することを示せ.

中心力とき，α を正の定数として、$\overrightarrow{F} = -\alpha\vec{r}$ と書ける．したがって，

$$\overrightarrow{N} = \vec{r}\times\overrightarrow{F} = -a(\vec{r}\times\vec{r}) = 0$$

より，$\dot{\overrightarrow{L}} = \overrightarrow{N} = 0$ なので，角運動量は保存する.