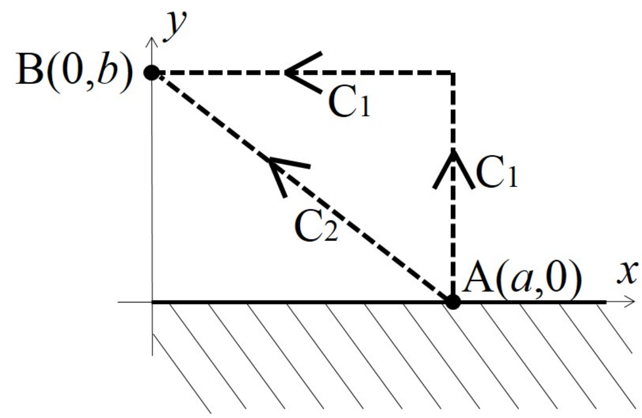
基礎力学演習　第8回　仕事とエネルギー保存則（3次元）

2019年11月29日　担当：佐藤 純

問題 1 地面に水平に x 軸，鉛直方向上向きに y 軸をとる．質量 m の物体を A 地点 $(a,0)$ から B 地点 $(0,b)$ まで運ぶのに必要な仕事を求めよう (右図参照)．物体には重力 $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ が働いているので，物体を支えるためには $-\overrightarrow{F}$ の力が必要である．したがって，物体を $\mathrm{d}\vec{r}$ だけ微小に動かすのに必要な仕事は $-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ である．これを経路 C に沿って足し合わせれば，物体を経路 C に沿って運ぶのに必要な仕事 $W(C)$ が

$$W(C) = \int_C -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

と求まることになる．



(1-1) 経路 C_1 に沿って物体を A から B まで運ぶのに必要な仕事 $W(C_1)$ を計算せよ．

$C_1 = C_1' + C_1''$,　　$C_1' : (a,0) \to (a,b)$,　$C_1'' : (a,b) \to (0,b)$ とする．

$\boxed{C_1'}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ bs \end{pmatrix}, \quad s: 0 \to 1, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\mathrm{d}s \end{pmatrix}, \quad -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ b\mathrm{d}s \end{pmatrix} = mgb\,\mathrm{d}s,$$

$$W(C_1') = \int_{C_1'} -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 mgb\,\mathrm{d}s = mgb\,[s]_0^1 = mgb(1-0) = mgb$$

$\boxed{C_1''}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} as \\ b \end{pmatrix}, \quad s: 0 \to 1, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} a\mathrm{d}s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a\mathrm{d}s \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$W(C_1'') = \int_{C_1''} -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

以上より，$W(C_1) = W(C_1'') + W(C_1'') = \boxed{mgb}$

(1-2) 経路 C_2 に沿って物体を A から B まで運ぶのに必要な仕事 $W(C_2)$ を計算せよ．

$\boxed{C_2}$　$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + s\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix},$

$$s: 0 \to 1, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}\mathrm{d}s, \quad -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}\mathrm{d}s = mgb\,\mathrm{d}s,$$

$$W(C_2) = \int_{C_2} -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 mgb\,\mathrm{d}s = mgb[s]_0^1 = mgb(1-0) = \boxed{mgb}$$

(1-3) 重力ポテンシャルは $U(x,y) = mgy$ で与えられる．前問で求めた仕事は経路によらず，ポテンシャルエネルギーの増加分に等しいことを確認せよ．

場所 (x,y) におけるポテンシャルは $U(x,y)=mgy$ なので，$U(0,b)-U(a,0)=mgb-0=mgb=W(C_1)=W(C_2)$ が成り立っている．

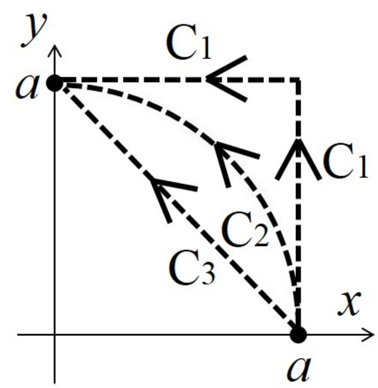
(1-4) 物体に働く力 $\overrightarrow{F}$ はポテンシャルの微分で

$$\overrightarrow{F}=-\overrightarrow{\nabla}U$$

と書けることを確認せよ．

$$-\overrightarrow{\nabla}U=-\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}U=-\begin{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x}\\ \frac{\partial U}{\partial y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\ mg\end{pmatrix}=\overrightarrow{F}$$

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ 場所 (x,y) において，物体に力 $\overrightarrow{F}(x,y)=\begin{pmatrix}-ky\\ kx\end{pmatrix}$ が働くとする．(k は定数)



(2-1) 右図中の経路 C_1 に沿って物体を運ぶのに必要な仕事 $W(C_1)$ を求めよ．

$\boxed{C_1}$ $C_1=C_1'+C_1''$, $C_1':(a,0)\to(a,a)$, $C_1'':(a,a)\to(0,a)$ とする．

(a) C_1': $\vec{r}=\begin{pmatrix}a\\ as\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\ s\end{pmatrix}$, $s:0\to 1$, $\mathrm{d}\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\ a\mathrm{d}s\end{pmatrix}=a\mathrm{d}s\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

(b) C_1'': $\vec{r}=\begin{pmatrix}as\\ a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}s\\ 1\end{pmatrix}$, $s:1\to 0$, $\mathrm{d}\vec{r}=\begin{pmatrix}a\mathrm{d}s\\ 0\end{pmatrix}=a\mathrm{d}s\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

(a) $\boxed{C_1'}$ $-\overrightarrow{F}=k\begin{pmatrix}y\\ -x\end{pmatrix}=ka\begin{pmatrix}s\\ -1\end{pmatrix}$, $-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=ka\begin{pmatrix}s\\ -1\end{pmatrix}\cdot a\mathrm{d}s\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=-ka^2\mathrm{d}s$,

$W(C_1')=\int_{C_1'}-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\int_0^1 ka^2\mathrm{d}s=-ka^2$

(b) $\boxed{C_1''}$ $-\overrightarrow{F}=k\begin{pmatrix}y\\ -x\end{pmatrix}=ka\begin{pmatrix}1\\ -s\end{pmatrix}$, $-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=ka\begin{pmatrix}1\\ -s\end{pmatrix}\cdot a\mathrm{d}s\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=ka^2\mathrm{d}s$,

$W(C_1')=\int_{C_1'}-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_1^0 ka^2\mathrm{d}s=-ka^2$

以上より，$W(C_1)=W(C_1'')+W(C_1'')=-ka^2-ka^2=\boxed{-2ka^2}$

(2-2) 右図中の経路 C_2 に沿って物体を運ぶのに必要な仕事 $W(C_2)$ を求めよ．ただし，C_2 は半径 a の円弧を表すとする．

$$\boxed{C_2} \quad \vec{r} = a\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}, \quad \theta : 0 \to \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\vec{r} = a\mathrm{d}\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\boxed{C_2} \quad -\overrightarrow{F} = k\begin{pmatrix}y \\ -x\end{pmatrix} = ka\begin{pmatrix}\sin\theta \\ -\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = ka\begin{pmatrix}\sin\theta \\ -\cos\theta\end{pmatrix}\cdot a\mathrm{d}\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} = ka^2\mathrm{d}\theta(-\cos^2\theta - \sin^2\theta) = -ka^2\mathrm{d}\theta,$$

$$W(C_1) = \int_{C_1} -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta = -ka^2\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{-\frac{\pi}{2}ka^2}$$

(2-3) 右図中の経路 C_3 に沿って物体を運ぶのに必要な仕事 $W(C_3)$ を求めよ．

$$\boxed{C_3} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix}a \\ 0\end{pmatrix} + s\left\{\begin{pmatrix}0 \\ a\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a \\ 0\end{pmatrix}\right\} = a\begin{pmatrix}1-s \\ s\end{pmatrix}, \quad s : 0 \to 1, \quad \mathrm{d}\vec{r} = a\mathrm{d}s\begin{pmatrix}-1 \\ 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{C_3} \quad -\overrightarrow{F} = k\begin{pmatrix}y \\ -x\end{pmatrix} = ka\begin{pmatrix}s \\ -1+s\end{pmatrix},$$

$$-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = ka\begin{pmatrix}s \\ -1+s\end{pmatrix}\cdot a\mathrm{d}s\begin{pmatrix}-1 \\ 1\end{pmatrix} = -ka^2\mathrm{d}s,$$

$$W(C_3) = \int_{C_3} -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -ka^2\int_0^1\mathrm{d}s = -ka^2\left[s\right]_0^1 = \boxed{-ka^2}$$

問題 3 物体が外力を受けながら運動している．場所 (x, y) で物体が受ける外力を $\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix}-\dfrac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{ky}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}$ とする (k は定数)．原点を基準点として，ポテンシャル $U(x, y)$ を求めよ．

場所 (a, b) におけるポテンシャル $U(a, b)$ は，基準点から (a, b) まで運ぶのに必要な仕事に等しい．今の場合 $\overrightarrow{F}(x, y)$ は保存力なので（示さなくてよい），仕事は経路によらない．基準点と (a, b) を結ぶ直線経路を C とすると，C 上の点 $\vec{r}$ は

$$\vec{r} = s\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix} \quad s : 0 \to 1$$

と表される．したがって，

$$\begin{aligned} U(a, b) &= \int_C -\overrightarrow{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\ &= \int_0^1 -\overrightarrow{F}(sa, sb)\cdot\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} \dfrac{ksa}{\sqrt{(sa)^2+(sb)^2}} \\ \dfrac{ksb}{\sqrt{(sa)^2+(sb)^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} \dfrac{ka}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{kb}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \left(\frac{ka^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{kb^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \mathrm{d}s \\
&= k \int_0^1 \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \mathrm{d}s \\
&= k \int_0^1 \sqrt{a^2+b^2} \mathrm{d}s \\
&= k\sqrt{a^2+b^2}
\end{aligned}
$$

以上により，

$$
\boxed{U(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}}
$$