基礎力学演習　第7回　仕事とエネルギー保存則（1次元）

2019年11月15日　　担当：佐藤 純

問題1 x 軸上を一次元運動する物体を考える．物体は場所 x で外力 $F(x) = -2x - 4x^3$ を受けるとする．

(1-1) 物体が $x = 1$ から $x = 2$ まで移動したとき，外力がした仕事を求めよ．

外力は $F(x)$ であるから，外力がした仕事は

$$W_{\text{外力}} = \int_1^2 F(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (-2x - 4x^3)\mathrm{d}x = \left[-x^2 - x^4\right]_1^2 = \boxed{-18}$$

(1-2) 物体を $x = 1$ から $x = 2$ まで (外力に逆らって人間が) 運ぶのに必要な仕事を求めよ．

外力に逆らって人間が加えた力は $-F(x)$ であるから，人間がした仕事は

$$W_{\text{人間}} = \int_1^2 -F(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (2x + 4x^3)\mathrm{d}x = \left[x^2 + x^4\right]_1^2 = \boxed{18}$$

(1-3) $x = 0$ を基準点として，ポテンシャル $U(x)$ を求めよ．

基準点 $x = 0$ から，外力に逆らって $x = a$ まで物体を運んだとき，人間がした仕事は

$$W(0 \to a) = \int_0^a -F(x)\mathrm{d}x = \left[x^2 + x^4\right]_0^a = a^2 + a^4$$

である．してもらった仕事の分だけ，物体はポテンシャルエネルギーを獲得するので，$U(a) = U(0) + W(0 \to a) = 0 + (a^2 + a^4) = a^2 + a^4$ である．文字を a から x に書き換えて，

$$\boxed{U(x) = x^2 + x^4}$$

問題2 単振り子の振れ角 θ に対する運動方程式は，以前やったように

$$\ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

で与えられる．両辺に $\dot{\theta}$ をかけて一回積分することにより，エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{定数}$$

を導け．ただし，おもりの速度は $v = \ell\dot{\theta}$ で，おもりの高さは $y = \ell(1 - \cos\theta)$ で与えられることを用いてよい．

$\ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta$ の両辺を θ で積分すると，

$$\ell\int\ddot{\theta}\mathrm{d}\theta = -g\int\sin\theta\mathrm{d}\theta = g\cos\theta + C'$$

となる．左辺は，$\ddot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}$, より，

$$\ell \int \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = \ell \int \dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta} = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2 + C''$$

となる．したがって，

$$\frac{1}{2}\ell\dot{\theta}^2 = g\cos\theta + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

となる．あとは与式を得るために適当に変形して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 = g\ell\cos\theta + C_1 = g\ell(\cos\theta - 1) + C_2 \quad (C_1 = C\ell, C_2 = C_1 + g\ell)\\
&\frac{1}{2}v^2 = g(-y) + C_2\\
&\frac{1}{2}mv^2 + mgy = C_3 = \text{定数} \quad (C_3 = mC_2)
\end{aligned}$$

が示される．

問題 3 地上に質量 m のボールが置いてある．鉛直上向きに z 軸を取る．重力加速度を g とする．

(3-1) ボールを高さ $z = h$ の地点まで持ち上げるのに必要な仕事量 W を求めよ．

仕事 W[J]=力 [N]× 距離 [m] である．ボールには重力 $-mg$ が働いているので，それを支えるのに mg の力が必要である．一定の力 mg で h だけボールを動かすので，必要な仕事量は

$$\boxed{W = mgh}$$

である．

(3-2) 高さ z におけるこのボールの位置エネルギー $U(z)$ を求めよ．ただし，基準点は $z = 0$ とする．

人間がボールにした仕事のぶんだけ，ボールはポテンシャルエネルギーを獲得する．すなわち，$U(z) = mgz$.

(3-3) $-U'(z)$ を計算し，ボールの受ける力になることを確認せよ．

ポテンシャルエネルギーを空間微分してマイナスとつけると力になる：

$$-U'(z) = -(mgz)' = -mg = F(z)$$

問題 4 摩擦のない床にバネ定数 k のバネがあり，左端は固定，右端には質量 m のおもりが付けられている．バネ左端から右端に向かって x 軸を取り，バネが自然長の位置を $x = 0$ とする．

(4-1) バネが x だけ伸びているとき，さらに $\mathrm{d}x$ だけ伸ばすのに必要な仕事量 $\mathrm{d}W$ を求めよ．

バネは x だけ伸びているので，ばねが縮もうとする力は $-kx$ である．それを支えるために，手は $+kx$ のちからでバネを引っ張らなければならない．仕事は力×移動距離なので，$\boxed{\mathrm{d}W = kx\mathrm{d}x}$ となる．

(4-2) 上の結果を $x = 0$ から $x = a$ まで足し合わせることによって，自然長のバネを a だけ伸ばすのに必要な仕事量 W を求めよ．

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^a kx\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^a = \boxed{\frac{1}{2}ka^2}$$

(4-3) バネが x だけ伸びているときに持っているバネの弾性エネルギー $U(x)$ を求めよ．

人間がバネにした仕事のぶんだけ，バネはポテンシャルエネルギーを獲得する．すなわち，$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$

(4-4) $-U'(x)$ を計算せよ．（おもりが位置 x においてバネから受ける力は $F(x) = -U'(x)$ で与えられることを確認せよ．）

ポテンシャルエネルギーを空間微分してマイナスとつけると力になる：

$$-U'(x) = -\left(\frac{1}{2}kx^2\right)' = -kx = F(x)$$