

基礎力学演習 第7回 仕事とエネルギー保存則 (1次元)

2019年11月15日 担当：佐藤 純

問題1 x 軸上を一次元運動する物体を考える。物体は場所 x で外力 $F(x) = -2x - 4x^3$ を受けるとする。

- (1-1) 物体が $x = 1$ から $x = 2$ まで移動したとき、外力がした仕事を求めよ。
- (1-2) 物体を $x = 1$ から $x = 2$ まで (外力に逆らって人間が) 運ぶのに必要な仕事を求めよ。
- (1-3) $x = 0$ を基準点として、ポテンシャル $U(x)$ を求めよ。

問題2 単振り子の振れ角 θ に対する運動方程式は、以前やったように

$$\ell\ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

で与えられる。両辺を θ で積分することにより、エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{定数}$$

を導け。ただし、おもりの速度は $v = \ell\dot{\theta}$ で、おもりの高さは $y = \ell(1 - \cos \theta)$ で与えられることを用いてよい。

問題3 地上に質量 m のボールが置いてある。鉛直上向きに z 軸を取る。重力加速度を g とする。

- (3-1) ボールを高さ $z = h$ の地点まで持ち上げるのに必要な仕事量 W を求めよ。
- (3-2) 高さ z におけるこのボールの位置エネルギー $U(z)$ を求めよ。ただし、基準点は $z = 0$ とする。
- (3-3) $-U'(z)$ を計算し、ボールの受ける力になることを確認せよ。

問題4 摩擦のない床にバネ定数 k のバネがあり、左端は固定、右端には質量 m のおもりが付けられている。バネ左端から右端に向かって x 軸を取り、バネが自然長の位置を $x = 0$ とする。

- (4-1) バネが x だけ伸びているとき、さらに dx だけ伸ばすのに必要な仕事量 dW を求めよ。
- (4-2) 上の結果を $x = 0$ から $x = a$ まで足し合わせることによって、自然長のバネを a だけ伸ばすのに必要な仕事量 W を求めよ。
- (4-3) バネが x だけ伸びているときに持っているバネの弾性エネルギー $U(x)$ を求めよ。
- (4-4) $-U'(x)$ を計算せよ。(おもりが位置 x においてバネから受ける力は $F(x) = -U'(x)$ で与えられることを確認せよ。)