# 基礎力学演習　第 6 回　減衰振動・強制振動

2018 年 10 月 26 日　　担当：佐藤 純

**問題 1** バネ定数 $k$ のバネの一端に質量 $m$ のおもりを付け，他端を固定する．
おもりが机の上を動く際に，速度に比例した摩擦力が働くとし，比例定数を $\gamma$ とする．

**(1-1)** おもりの運動方程式を立てよ．

バネが自然長（伸びも縮みもないときの長さ）のときのおもりの位置を $x=0$ とすると，バネがおもりに及ぼす力は $-kx$，おもりに働く摩擦力は $-\gamma v$ と書けるので，運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}}$$

となる．

**(1-2)** 指数関数型の解 $x(t) = e^{\lambda t}$ を仮定し，$\lambda$ に対する方程式を導け．

$x(t) = e^{\lambda t}$ を運動方程式に代入すると，

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t} - \gamma\lambda e^{\lambda t},$$
$$\boxed{m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0}$$

と，$\lambda$ に対する二次方程式が得られる．

**(1-3)** おもりにつり合いの位置で初速度 $v_0$ を与えた時，その後のおもりの運動を決定せよ．
摩擦が十分に小さいときと大きいときで，場合分けすること．

この 2 次方程式を解くと，

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$$

となる．ここで，上の $\lambda$ の式のルートの中身 $\gamma^2 - 4mk$ に注目する．ルートの中身が正ならば $\lambda$ は実数，負なら $\lambda$ は複素数となる．摩擦の大きさ $\gamma$ が $\sqrt{4mk}$ より大きいかどうかで，ルートの中身 $\gamma^2 - 4mk$ の正負が決まる．ルートの中身が負の場合，$\lambda$ は複素数となる．

$\lambda$ が実数か複素数かで，おもりの運動は大きく異なる．すなわち，$\gamma$ と $\sqrt{4mk}$ の大小関係により，おもりの運動は大きく異なることになる．

**摩擦が小さいとき ($\gamma < \sqrt{4mk}$)**

このとき，ルートの中身 $\gamma^2 - 4mk$ は負となり，$\lambda$ は複素数となる．すなわち，

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-\gamma \pm \mathrm{i}\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}$$
$$= -\frac{\gamma}{2m} \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}$$

となるので，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2}$ とおくと，$\lambda = -\dfrac{\gamma}{2m} \pm \mathrm{i}\omega$ となり，一般解は

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{(-\frac{\gamma}{2m}+\mathrm{i}\omega)t} + Be^{(-\frac{\gamma}{2m}-\mathrm{i}\omega)t} \\
&= Ae^{-\frac{\gamma}{2m}t+\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\frac{\gamma}{2m}t-\mathrm{i}\omega t} \\
&= Ae^{-\frac{\gamma}{2m}t}e^{\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\frac{\gamma}{2m}t}e^{-\mathrm{i}\omega t} \\
&= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(Ae^{\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\mathrm{i}\omega t}) \\
&= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\{A(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + B(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t)\} \\
&= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\{(A+B)\cos\omega t + \mathrm{i}(A-B)\sin\omega t\} \\
&= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(C\cos\omega t + D\sin\omega t)
\end{aligned}$$

となる．ただし，$C = A + B$, $D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた．

初期条件 $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$ から，積分定数 $C$ と $D$ を決定する．
まず，$x(0) = 0$ より，$x(0) = C = 0$ を得る．しがたって，

$$x(t) = De^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin\omega t$$

を得る．これを微分して，

$$\begin{aligned}
v(t) = x'(t) &= D\{(e^{-\frac{\gamma}{2m}t})'\sin\omega t + e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(\sin\omega t)'\} \\
&= De^{-\frac{\gamma}{2m}t}(\omega\cos\omega t - \frac{\gamma}{2m}\sin\omega t)
\end{aligned}$$

より，$v_0 = v(0) = D\omega$ なので，$D = \dfrac{v_0}{\omega}$ を得る．
したがって，

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin\omega t}$$

となる．

摩擦が大きいとき ($\gamma < \sqrt{4mk}$)

このとき，ルートの中身 $\gamma^2 - 4mk$ は正となり，$\lambda$ は実数となる．

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$$
$$\lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$$

とおくと，一般解は

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

となる．初期条件は，$x(0) = 0$, $v(0) = v_0$ となる．よって，$0 = x(0) = A + B$ より $B = -A$ なので，

$$x(t) = A(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$$

を得る．また，

$$v(t) = x'(t) = A(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t})$$

より，

$$v_0 = v(0) = A(\lambda_1 - \lambda_2) = A\frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{m}$$

なので，

$$A = \frac{mv_0}{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}$$

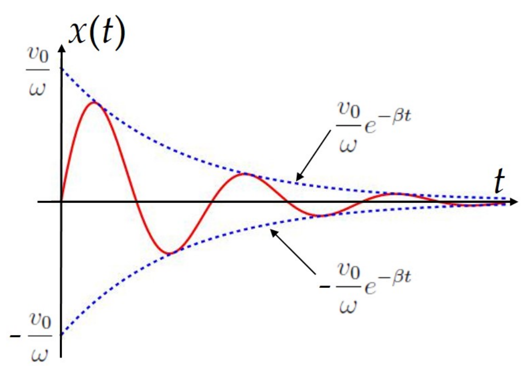
を得る．

　したがって，

$$\boxed{x(t) = \frac{mv_0}{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})}$$

となる．

**(1-4)** 摩擦が十分に小さいとき，上の結果をグラフに表せ．




微小な摩擦力によって減衰振動が起こる．

**問題 2** バネの下端に質量 $m$ のおもりを付け，上端を振動させる．鉛直下向きに $x$ 軸をとり，バネの上端の座標を $x_0$ として，$x_0 = A\sin\omega t$ と振動させる．バネ自身の質量，空気抵抗は無視し，バネ定数を $k$，バネの自然長を $\ell$ とする．

**(2-1)** 時刻 $t$ において，おもりの位置が $x$ のとき，バネの伸びはどれだけか．

　バネの全長は $x - x_0$ なので，伸びは $x - x_0 - \ell = \boxed{x - A\sin\omega t - \ell}$ となる．

**(2-2)** おもりの運動方程式 (おもりの位置 $x$ に対する微分方程式) を立てよ．

　伸びは $x - A\sin\omega t - \ell$ なので，バネの力は $-k(x - A\sin\omega t - \ell)$ となる．

これと重力 $+mg$ を合わせて運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{x} = -k(x - A\sin\omega t - \ell) + mg}$$

となる．

**(2-3)** $y = x - \ell - mg/k$ とし，$y$ に対する微分方程式を導け．ただし，$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおいて式を整理せよ．

運動方程式を整理すると，

$$m\ddot{x} = -k\left(x - A\sin\omega t - \ell - mg/k\right)$$

となる．ここで，$y = x - \ell - mg/k$ とおくと，$\ell$ と $mg/k$ は定数なので，
$\dot{y} = \dot{x},\quad \ddot{y} = \ddot{x}$ である．したがって，

$$m\ddot{y} = -k(y - A\sin\omega t)$$

を得る．$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくと，$\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$ より，

$$\boxed{\ddot{y} + \omega_0^2 y = A\omega_0^2 \sin\omega t}$$

となる．

**(2-4)** $y = B\sin\omega t$ がこの微分方程式を満たすように，定数 $B$ を決定せよ．

$\ddot{y} = -B\omega^2 \sin\omega t$ をこの微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} &-B\omega^2 \sin\omega t + \omega_0^2 B\sin\omega t = A\omega_0^2 \sin\omega t, \\ &-B\omega^2 + \omega_0^2 B = A\omega_0^2 \end{aligned}$$

より，$\boxed{B = A\dfrac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$ を得る．

**(2-5)** $A = 0$ の場合 (バネの上端が動かない場合) の，$y$ の一般解を求めよ．

$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ より，

$$\boxed{y = C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t}$$

が一般解となる．

**(2-6)** (2-4) と (2-5) の結果を合わせることにより，$y$ の一般解を求めよ．

$$\boxed{y = C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t + A\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t}$$

**(2-7)** 初期条件としておもりを静かにぶらさげておいて，$t=0$ にバネの上端を振動させ始めたとしたとき，おもりはどのような運動をするか．積分定数 $C, D$ を決定して $y$ を求めよ．

初期条件は，$t=0$ のとき $x=\ell+mg/k,\ \dot{x}=0$ より，$y=\dot{y}=0$ となる．
まず，$t=0$ で $y=0$ より，$C=0$ を得る．したがって，

$$y = D\sin\omega_0 t + A\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t$$

$$\dot{y} = D\omega_0\cos\omega_0 t + A\frac{\omega\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t$$

となる．$t=0$ で $\dot{y}=0$ より，$D=-A\dfrac{\omega\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$ なので，

$$\begin{aligned} y &= -A\frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega_0 t + A\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t \\ &= \boxed{A\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t\right)} \end{aligned}$$

**(2-8)** バネの上端の振動数 $\omega$ を，バネの固有振動数 $\omega_0$ に近づけたとき，おもりはどのような運動をするか．極限 $\displaystyle\lim_{\omega\to\omega_0} y$ を計算して調べよ．

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to\omega_0} y &= A\omega_0 \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t}{\omega_0^2-\omega^2} \\ &= A\omega_0 \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)} \\ &= A\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{t\omega_0^2\cos\omega t - \omega_0\sin\omega_0 t}{-2\omega} \\ &= \boxed{\frac{A}{2}\left(\sin\omega_0 t - t\omega_0\cos\omega_0 t\right)} \end{aligned}$$

共鳴して振幅がどんどん大きくなる