基礎力学演習　第5回　定数係数線形微分方程式・振り子

2019年10月25日　　担当：佐藤 純

問題1 以下の微分方程式を初期条件 $[x=0$ のとき $y=0,\ y'=4\ ]$ のもとに解き，グラフの概形を描け．ただし，y は x の関数であるとし，$y'=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x,\ y''=\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ である．

(1-1) $y''+4y=0$

定数係数の線形微分方程式なので，指数関数型の解 $y=e^{\lambda x}$ を仮定する．これを微分すると $y'=\lambda e^{\lambda x},\ y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$ となる．これを微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 e^{\lambda x}+4e^{\lambda x}=0,\\
&e^{\lambda x}(\lambda^2+4)=0,\\
&\lambda^2+4=0,\\
&\lambda=\pm 2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

を得る．ここで，$e^{\lambda x}>0$ であることを使った．

これを $y=e^{\lambda x}$ に代入して，２つの基本解 $y=e^{2\mathrm{i}x},\ y=e^{-2\mathrm{i}x}$ を得る．
よって，この微分方程式の一般解は

$$y=Ae^{2\mathrm{i}x}+Be^{-2\mathrm{i}x}\quad (A,B\ \text{は積分定数}) \tag{1}$$

となる．あるいは，指数関数をオイラーの公式を使って三角関数に直すと，

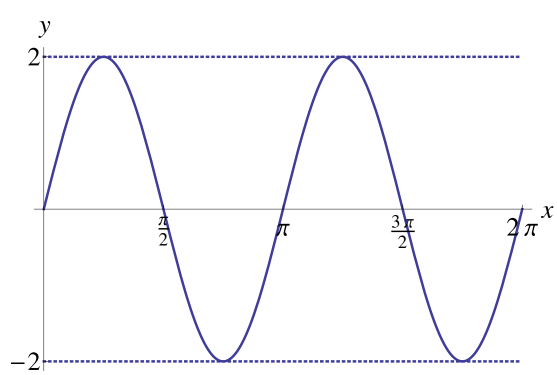
$$\begin{aligned}
y&=Ae^{2\mathrm{i}x}+Be^{-2\mathrm{i}x}\\
&=A(\cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x)+B(\cos 2x-\mathrm{i}\sin 2x)\\
&=(A+B)\cos 2x+\mathrm{i}(A-B)\sin 2x\\
&=C\cos 2x+D\sin 2x\quad (C,D\ \text{は積分定数})
\end{aligned} \tag{2}$$

となる．ただし，$C=A+B,\ D=\mathrm{i}(A-B)$ とおいた．

上の (1) 式と (2) 式は等価であり，どちらを使ってもよいが，初期値問題を解く際には (2) 式の方が楽なことが多いので，以下の問題では断りなく (2) 式の形に書き換えることもある．

$x=0$ のとき $y=C=0$ なので，$y=D\sin 2x$ となる．
これを微分すると $y'=2D\cos 2x$ となる．
$x=0$ のとき $y'=4=2D$ なので，$D=2$ となる．

したがって，$\boxed{y=2\sin 2x}$ を得る．



(1-2) $y'' + 6y' + 13y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$ の解は $\lambda = -3 \pm 2\mathrm{i}$ なので，一般解は

$$\begin{aligned} y &= Ae^{(-3+2\mathrm{i})x} + Be^{(-3-2\mathrm{i})x} \\ &= Ae^{-3x+2\mathrm{i}x} + Be^{-3x-2\mathrm{i}x} \\ &= Ae^{-3x}e^{2\mathrm{i}x} + Be^{-3x}e^{-2\mathrm{i}x} \\ &= e^{-3x}(Ae^{2\mathrm{i}x} + Be^{-2\mathrm{i}x}) \\ &= e^{-3x}\{A(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x) + B(\cos 2x - \mathrm{i}\sin 2x)\} \\ &= e^{-3x}\{(A+B)\cos 2x + \mathrm{i}(A-B)\sin 2x\} \\ &= e^{-3x}(C\cos 2x + D\sin 2x) \end{aligned}$$

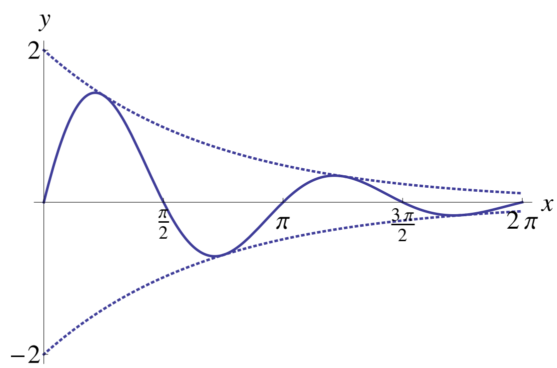
となる．ただし，$C = A + B$, $D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた．

$x = 0$ のとき $y = C = 0$ なので，$y = De^{-3x}\sin 2x$ となる．
これを微分すると

$$\begin{aligned} y' &= D\{\left(e^{-3x}\right)'\sin 2x + e^{-3x}\,(\sin 2x)'\} \\ &= D\left(-3e^{-3x}\sin 2x + 2e^{-3x}\cos 2x\right) \end{aligned}$$

となる．$x = 0$ のとき $y' = 4 = 2D$ なので，$D = 2$ となる．

したがって，$\boxed{y = 2e^{-3x}\sin 2x}$ を得る．



$\sin 2x$ は波を表すが，その振幅が $2e^{-3x}$ に従って減衰する．したがってグラフを描くときは，まず $\pm 2e^{-3x}$ のグラフを描き，その中を振動する波を描けばよい．これを減衰振動と呼ぶ．

(1-3) $y'' + 6y' + 5y = 0$

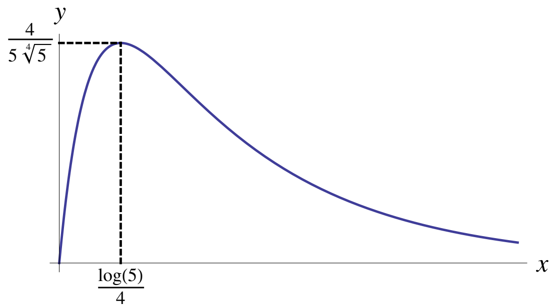
特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$ の解は $\lambda = -1, -5$ なので，一般解は

$$y = Ae^{-x} + Be^{-5x}$$

となる．これを微分すると

$$y' = -Ae^{-x} - 5Be^{-5x}$$

となる．初期条件より，$0 = A + B$, $4 = -A - 5B$ なので，$\boxed{y = e^{-x} - e^{-5x}}$ を得る．



まず，$x=0$ のとき $y=0$ なので，グラフは原点を通る．
次に，$x>0$ のとき $e^{-x}>e^{-5x}$ なので，常に $y>0$ である．
また，$x\to\infty$ で $y\to 0$ となる．

増減表を書くため y' を計算すると，

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x}+5e^{-5x} \\ &= e^{-5x}(5-e^{4x}) \end{aligned}$$

となるが，$y'=0$ となる x は

$$e^{4x}=5 \ \Leftrightarrow\ 4x=\log 5 \ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{4}\log 5$$

と求まる．また，

$$e^{4x}=5 \ \Leftrightarrow\ e^{-x}=5^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \ \Leftrightarrow\ e^{-5x}=5^{-\frac{5}{4}}=5^{-1}5^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{5\sqrt[4]{5}}$$

より，そのとき y は

$$\begin{aligned} y' &= e^{-x}-e^{-5x} \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{5}}-\frac{1}{5\sqrt[4]{5}} \\ &= \frac{4}{5\sqrt[4]{5}} \end{aligned}$$

したがって増減表は

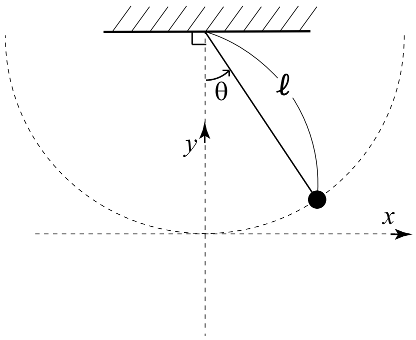
x	0	$\sim$	$\frac{1}{4}\log 5$	$\sim$
y'	4	$+$	0	$-$
y	0	$\nearrow$	$\frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$	$\searrow$

となる．

問題 2 糸の先におもりをつけ，他端を天井に固定して吊るす．糸の質量は無視し，おもりは鉛直面内で振動するとする．

糸の固定点を通る上向きの鉛直線を y 軸，おもりの最も低くなる点を原点とし，原点から水平方向に x 軸をとる.（図を参照）.

糸の長さを ℓ，おもりの質量を m とし，xy 面内の運動を考える．



(2-1) 単振り子の糸が y 軸となす角を θ とする．(図を参照).
おもりの位置座標 (x, y) を θ を用いて表せ．

$$x = \ell \sin\theta, \quad y = \ell(1-\cos\theta)$$

(2-2) 上式を時間微分することにより，$\ddot{x}, \ddot{y}$ を $\dot{\theta}, \ddot{\theta}$ の式で表せ．

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \ell\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}t} = \ell\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \boxed{\ell\cos\theta\dot{\theta}}$$

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \ell\frac{\mathrm{d}(-\cos\theta)}{\mathrm{d}t} = \ell\frac{\mathrm{d}(-\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \boxed{\ell\sin\theta\dot{\theta}}$$

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \ell\frac{\mathrm{d}(\cos\theta\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = \ell\left(\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}\dot{\theta} + \cos\theta\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\right) = \ell\left(\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\dot{\theta} + \cos\theta\ddot{\theta}\right)$$

$$= \boxed{\ell\left(-\sin\theta(\dot{\theta})^2 + \cos\theta\ddot{\theta}\right)}$$

$$\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} = \ell\frac{\mathrm{d}(\sin\theta\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = \ell\left(\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}t}\dot{\theta} + \sin\theta\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\right) = \ell\left(\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\dot{\theta} + \sin\theta\ddot{\theta}\right)$$

$$= \boxed{\ell\left(\cos\theta(\dot{\theta})^2 + \sin\theta\ddot{\theta}\right)}$$

(2-3) 重力加速度を g, 糸の張力を T とし，おもりの運動方程式を立てよ．

重力は $\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$, 糸の張力は $\begin{pmatrix} -T\sin\theta \\ T\cos\theta \end{pmatrix}$ より，おもりに働く合力は $\begin{pmatrix} -T\sin\theta \\ T\cos\theta - mg \end{pmatrix}$
となるので，運動方程式は

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T\sin\theta \\ T\cos\theta - mg \end{pmatrix}$$

となる．

(2-4) 上式から糸の張力 T を消去し，θ に対する微分方程式を導け．

運動方程式の x 成分に $\cos\theta$，y 成分に $\sin\theta$ をかけて足し合わせると，

$$m(\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) = -mg\sin\theta$$

となるが，左辺に (2-2) の解答を代入して

$$\ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

を得る．

(2-5) 振り子の振り幅が十分小さいとき，振り子の運動は単振動になることを示し，振動の周期を求めよ．

$|\theta| \ll 1$ のとき，$\sin\theta \sim \theta$ より，$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ となる．これは単振動の微分方程式であり，$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ とおけば $\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ が一般解となる．したがって，周期 $T = 2\pi/\omega$ は，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

となり，おもりの質量や振れ幅によらず，糸の長さ ℓ だけで決まる（振り子の等時性）．