基礎力学演習　第4回　オイラーの公式・単振動

2019 年 10 月 18 日　　担当：佐藤 純

問題 1 オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ を使って，以下の式を示せ.

(1-1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} &= e^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{i}\beta} = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

一方、$e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$ なので、

$$\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

である。これの実部と虚部を比べて与式を得る。

(1-2) $\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$

$$\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = e^{\mathrm{i}nx} = \left(e^{\mathrm{i}x}\right)^n = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$$

問題 2 $\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ \beta = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ とするとき，以下の値を求めよ.

(2-1) α^6

$\alpha = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ より，$\alpha^6 = \left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^6 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\times 6} = e^{2\mathrm{i}\pi} = \boxed{1}$

(2-2) β^8

$\beta = \cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ より，$\beta^8 = \left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^8 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\times 8} = e^{2\mathrm{i}\pi} = \boxed{1}$

(2-3) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^4$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ より，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 = \left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^4 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}\times 4} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$$

問題 3 バネの一端に質量 m のおもりを付け，滑らかな机の上に置いて，他端を固定する.
おもりを引っ張ってバネを a だけ伸ばし，$t = 0$ におもりを静かに離したとする.

おもりを引っ張る方向に x 軸をとり，バネのつり合いの位置を $x = 0$ とする．
バネ自身の質量は無視し，バネ定数を k とする．

(3-1) おもりの運動方程式を立てよ．

バネがおもりに及ぼす力は $-kx$ と書けるので，運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx$$

となる．

(3-2) 指数関数型の解 $x(t) = e^{\lambda t}$ を仮定し，λ に対する方程式を導け．

$x(t) = e^{\lambda t}$ を運動方程式に代入すると，

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t},$$
$$\boxed{m\lambda^2 = -k}$$

と，λ に対する二次方程式が得られる．

(3-3) 上で求めた方程式から λ を決定し，運動方程式の一般解を求めよ．

上で求めた二次方程式を解くと，

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm \mathrm{i}\omega$$

となる．ただし，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおいた．
これを $x(t) = e^{\lambda t}$ に代入して，二つの基本解 $x(t) = e^{\mathrm{i}\omega t}$, $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ が得られる．
よって，一般解はこれらの線形結合で，

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &= A(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + B(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t) \\ &= (A+B)\cos\omega t + \mathrm{i}(A-B)\sin\omega t \\ &= \boxed{C\cos\omega t + D\sin\omega t} \end{aligned}$$

となる．ただし，$C = A + B$, $D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた．

(3-4) 運動方程式の初期条件 $x(0)$，$\dot{x}(0)$ を決定せよ．

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0$$

(3-5) 上で求めた初期条件をもとに，時刻 t におけるおもりの位置 $x(t)$ を求めよ．

$$x(0) = a = C\cos 0 + D\sin 0 = C$$

より，

$$C = a$$

を得る．また，

$$v(t) = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t$$

より，

$$v(0) = 0 = D\omega\cos 0 = D\omega$$

より，

$$D = 0$$

を得る．

したがって，

$$\boxed{x(t) = a\cos\omega t}$$

となる．

(3-6) 時刻 t におけるおもりの速度 $v(t)$ を求めよ．

$$v(t) = -a\omega\sin\omega t$$

問題 4 問題 3 のバネに 100g のオモリを吊るしたら，1cm 伸びた．

(4-1) このバネのバネ定数を求めよ．

$$k = f/x = mg/x = 0.1[\mathrm{kg}] \times 10[\mathrm{m/s^2}]/0.01[\mathrm{m}] = \boxed{100[\mathrm{N/m}]}$$

(4-2) 問題 3 で単振動させたおもりの質量 m を 100g とする．
おもりは 1 秒間に何回振動するか．

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{100[\mathrm{N/m}]/0.1[\mathrm{kg}]} = \sqrt{1000}[\mathrm{Hz}] = 30[\mathrm{Hz}],$$

$$f = \omega/(2\pi) = 30/6[\mathrm{Hz}] = \boxed{5[\mathrm{Hz}]}$$

(4-3) 問題 3 で最初に伸ばしたバネの長さを $a = 3\mathrm{cm}$ とする．
おもりの速度の最大値を求めよ．

$$v_{\mathrm{max}} = a\omega = 0.03[\mathrm{m}] \times 30[\mathrm{Hz}] = \boxed{1[\mathrm{m/s}]}$$