

基礎力学演習 第4回 オイラーの公式・単振動

2019年10月18日 担当：佐藤 純

問題1 オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を使って、以下の式を示せ.

$$(1-1) \begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$(1-2) \cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$$

問題2 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\beta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき、以下の値を求めよ.

$$(2-1) \alpha^6$$

$$(2-2) \beta^8$$

$$(2-3) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4$$

問題3 バネの一端に質量 m のおもりを付け、滑らかな机の上に置いて、他端を固定する. おもりを引っ張ってバネを a だけ伸ばし、 $t=0$ におもりを静かに離れたとする. おもりを引っ張る方向に x 軸をとり、バネのつり合いの位置を $x=0$ とする. バネ自身の質量は無視し、バネ定数を k とする.

(3-1) おもりの運動方程式を立てよ.

(3-2) 指数関数型の解 $x(t) = e^{\lambda t}$ を仮定し、 λ に対する方程式を導け.

(3-3) 上で求めた方程式から λ を決定し、運動方程式の一般解を求めよ.

(3-4) 運動方程式の初期条件 $x(0)$, $\dot{x}(0)$ を決定せよ.

(3-5) 上で求めた初期条件をもとに、時刻 t におけるおもりの位置 $x(t)$ を求めよ.

(3-6) 時刻 t におけるおもりの速度 $v(t)$ を求めよ.

問題4 問題3のバネに100gのおもりを吊るしたら、1cm伸びた.

(4-1) このバネのバネ定数を求めよ.

(4-2) 問題3で単振動させたおもりの質量 m を100gとする. おもりは1秒間に何回振動するか.

(4-3) 問題3で最初に伸ばしたバネの長さを $a = 3\text{cm}$ とする. おもりの速度の最大値を求めよ.