基礎力学演習　第3回　抵抗中の運動

2018 年 10 月 5 日　　担当：佐藤 純

問題 1 以下の $v(t)$ に対する微分方程式を，初期条件 $v(0) = 2$ のもとで解け． $\left(\dot{v} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$
また，得られた解のグラフを $t > 0$ の範囲で描け．

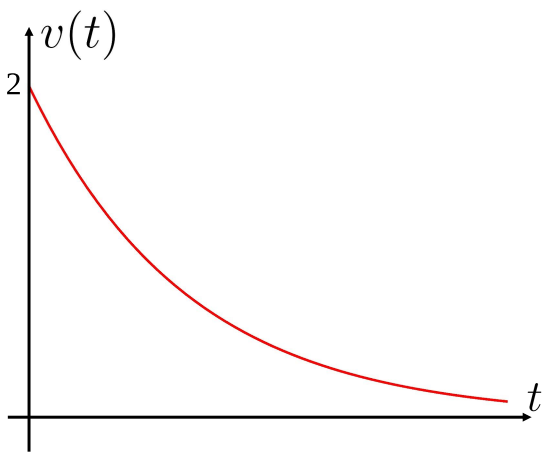
(1-1) $\dot{v} = -3v$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -3v, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -3\mathrm{d}t, \qquad \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int -3\mathrm{d}t, \qquad \log v = -3t + A,$$

$$v(t) = e^{-3t+A} = e^{-3t}e^{A} = Be^{-3t} \quad (B = e^{A})$$

初期条件 $v(0) = 2$ より，$B = 2$ なので，

$$\boxed{v(t) = 2e^{-3t}}$$



指数関数的に素早く減衰する．

(1-2) $\dot{v} = -3v^2$

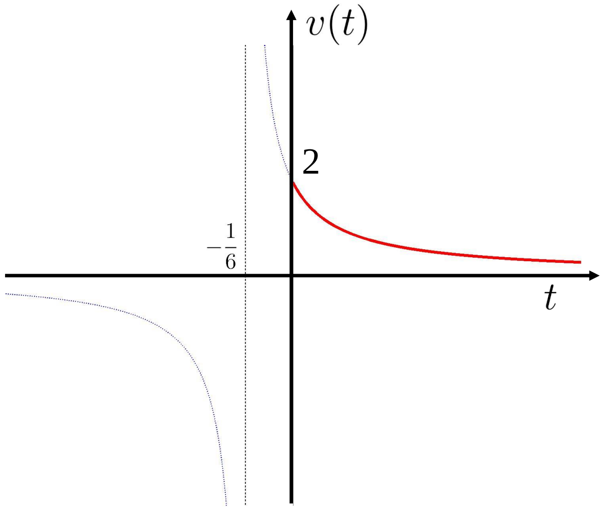
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -3v^2, \qquad -\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = 3\mathrm{d}t, \qquad \int -\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int 3\mathrm{d}t, \qquad \frac{1}{v} = 3t + A,$$

初期条件 $v(0) = 2$ より，$A = 1/2$ なので，

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{3t + \frac{1}{2}} = \frac{2}{6t + 1}}$$

$$v(t) = \frac{2}{6(t + 1/6)}$$

より，グラフは



問題 (1-1) と同様に減衰を表すが，より緩やかに減衰する（べき減衰）.

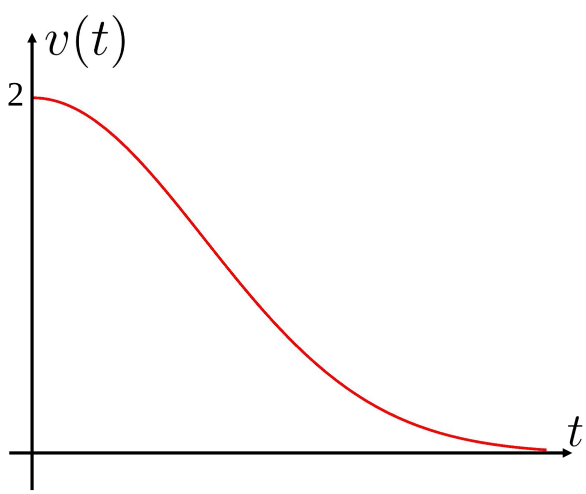
(1-3) $\dot{v} = -tv$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -tv, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -t\mathrm{d}t, \qquad \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int -t\mathrm{d}t, \qquad \log v = -\frac{1}{2}t^2 + A,$$

$$v(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2+A} = e^{-\frac{1}{2}t^2}e^A = Be^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (B = e^A)$$

初期条件 $v(0) = 2$ より，$B = 2$ なので，

$$\boxed{v(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t^2}}$$



同様に減衰するが，$t = 0$ では抵抗力が 0 なので減衰せず，グラフは傾き 0 で始まる．その後は急速に減衰する.

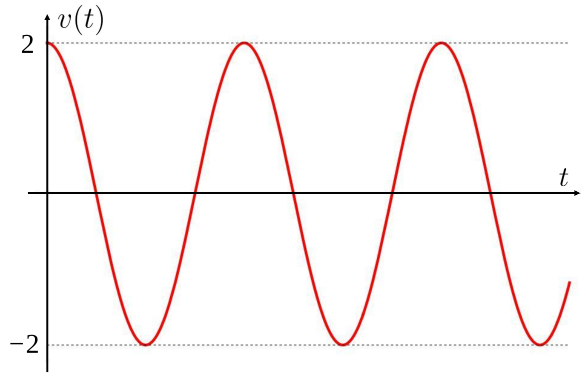
(1-4) $\dot{v} = -v\tan t$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v\tan t, \quad \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int \tan t\mathrm{d}t, \quad \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int -\frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{(\cos t)'}{\cos t}\mathrm{d}t,$$

$$\log v = \log\cos t + A, \quad v = e^{\log\cos t + A} = e^A e^{\log\cos t} = B\cos t \quad (B = e^A)$$

初期条件 $v(0)=2$ より，$B=2$ なので，

$$\boxed{v(t)=2\cos t}$$



最初は同様に減衰するが，その後振動を始める．

問題 2 地上の高い地点から質量 m のボールをそっと放し，ボールを落下させる．
その際，ボールは速度に比例する空気抵抗を受けるとし，その比例定数を γ とする．
鉛直下向きに z 軸を取り，ボールの初期位置を $z=0$ とする．

(2-1) ボールの運動方程式を立てよ．

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-\gamma v}$$

(2-2) 空気抵抗と重力が釣り合う条件から，時刻無限大 $t\to\infty$ でのボールの速度 v_∞ を求めよ．

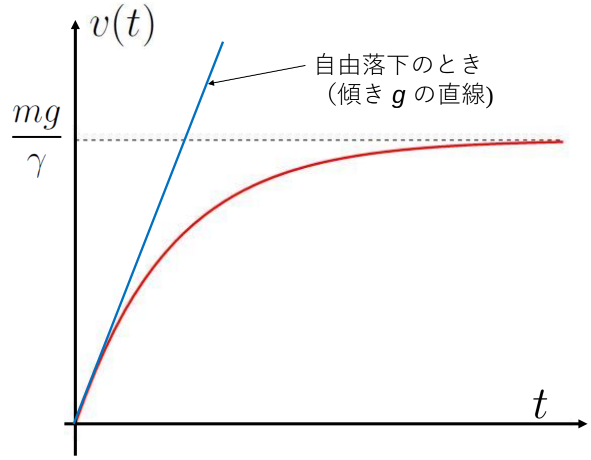
$mg=\gamma v_\infty$ より，$\boxed{v_\infty=\dfrac{mg}{\gamma}}$

(2-3) 運動方程式を解くことにより，時刻 t における物体の速度 $v(t)$ を求め，グラフを描け．

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-\frac{\gamma}{m}v=-\frac{\gamma}{m}\left(v-\frac{mg}{\gamma}\right)=-\frac{\gamma}{m}\left(v-v_\infty\right),$$

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v-v_\infty}=-\int\frac{\gamma}{m}\mathrm{d}t,\quad \log(v-v_\infty)=-\frac{\gamma}{m}t+A,\quad v-v_\infty=Be^{-\frac{\gamma}{m}t}\quad (B=e^A)$$

ここで，初期条件 $v(0)=0$ より，$-v_\infty=B$ なので，$\boxed{v=v_\infty\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)}$ を得る．



最初のうちは速度が小さいため抵抗力も少なく，自由落下の場合とほとんど変わらない（青と赤のグラフはほぼ重なっている）が，その後加速と共に空気抵抗は大きくなる．自由落下の場合は定加速度 g で際限なく加速していくが（グラフは傾き g の直線），空気抵抗がある場合には終端速度 $v_\infty = mg/\gamma$ を超えることはできない．

(2-4) 空気抵抗を小さくする極限 $\gamma \to 0$ で，ボールの運動は空気抵抗がない場合の自由落下 $(v(t) = gt)$ になることを示せ．
ただし，x が十分小さいとき $(|x| \ll 1$ のとき)，$e^x \sim 1 + x$ と近似できることを用いてよい．

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

より，

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\gamma}{m}t} &= 1 + \left(-\frac{\gamma}{m}t\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{t}{m}\gamma + \frac{t^2}{2m^2}\gamma^2 - \frac{t^3}{6m^3}\gamma^3 + \cdots \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma\to 0} v(t) &= \lim_{\gamma\to 0} v_\infty \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \\ &= \lim_{\gamma\to 0} \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \\ &= \lim_{\gamma\to 0} \frac{mg}{\gamma}\left(\frac{t}{m}\gamma - \frac{t^2}{2m^2}\gamma^2 + \frac{t^3}{6m^3}\gamma^3 + \cdots\right) \\ &= \lim_{\gamma\to 0} mg\left(\frac{t}{m} - \frac{t^2}{2m^2}\gamma + \frac{t^3}{6m^3}\gamma^2 + \cdots\right) \\ &= mg \cdot \frac{t}{m} \\ &= gt \end{aligned}$$

となる．

（別解）

$$\lim_{\gamma\to 0} v(t) = \lim_{\gamma\to 0} v_\infty \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\gamma \to 0} \frac{mg}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \\
&= mg \lim_{\gamma \to 0} \frac{1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}}{\gamma}
\end{aligned}
$$

となるが，これは $0/0$ の不定形なのでロピタルの定理より

$$
\begin{aligned}
\lim_{\gamma \to 0} v(t) &= mg \lim_{\gamma \to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\gamma} \\
&= mg \lim_{\gamma \to 0} \frac{-\left(-\frac{t}{m}\right) e^{-\frac{\gamma}{m}t}}{1} \\
&= mg \cdot \frac{t}{m} \\
&= gt
\end{aligned}
$$

となる．