

基礎力学演習 第2回 運動方程式の積分

2019年10月4日 担当：佐藤 純

問題1 地上から真上に初速度 v_0 で質量 m の物体を投げ上げる．空気抵抗の影響は無視する．

(1-1) 物体の運動を記述するのに適切な座標軸を設定せよ．

地上から鉛直上方に x 軸をとり，地上で $x = 0$ とする．

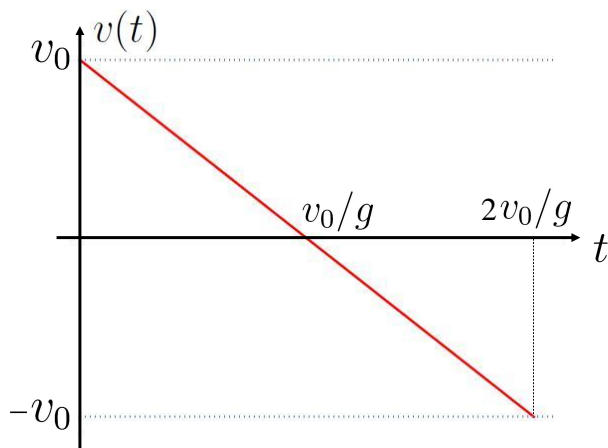
(1-2) 物体の運動方程式を立てよ．

$$ma = -mg$$

(1-3) 運動方程式を一回積分することにより，物体の速度を時間の関数として表し，グラフを描け．

$$v = \int a dt = \int (-g) dt = -gt + C$$

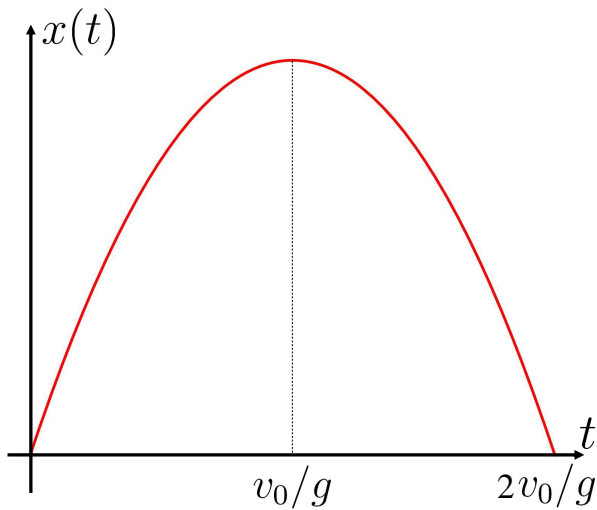
$t = 0$ で $v = v_0$ より， $C = v_0$ ．したがって， $v(t) = v_0 - gt$



(1-4) 運動方程式をもう一回積分することにより，物体の位置を時間の関数として表し，グラフを描け．

$$x = \int v dt = \int (v_0 - gt) dt = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + C$$

$t = 0$ で $x = 0$ より， $C = 0$ ．したがって， $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$



(1-5) 最高点に達する時間と、地上に落下する時間を求めよ.

最高点に達したとき, $v = v_0 - gt = 0$ より, $t = v_0/g$.
 地上に落下したとき, $x = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = t(2v_0 - gt)/2 = 0$ より, $t = 2v_0/g$.

(1-6) 最高点の高さを求めよ.

$$t = v_0/g \text{ のとき, } x = v_0(v_0/g) - \frac{1}{2}g(v_0/g)^2 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

問題 2 地上から角度 θ で斜めに初速度 v_0 で物体を発射する. 空気抵抗の影響は無視する.

(2-1) 物体の運動を記述するのに適切な座標軸を設定せよ.

発射地点を原点にとり, 水平方向に x 軸, 鉛直上向きに y 軸をとる. 物体は xy 面内を x 軸の正の方向に運動するとする.

(2-2) 物体に働く力ベクトル \vec{F} を求めよ.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

(2-3) 時刻 t における物体の位置ベクトルを $\vec{r}(t)$ として, 運動方程式を立てよ.

$$m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

(2-4) 運動方程式の各成分を一回積分することにより, 物体の速度ベクトルを時間の関数として表せ.

加速度の x 成分を積分して

$$v_x = \int a_x dt = C$$

となる. $t = 0$ で

$$v_x = v_0 \cos \theta$$

より,

$$C = v_0 \cos \theta$$

なので,

$$v_x = v_0 \cos \theta$$

を得る. 加速度の y 成分を積分して

$$v_y = \int a_y dt = -gt + D$$

となる. $t = 0$ で

$$v_y = v_0 \sin \theta$$

より,

$$D = v_0 \sin \theta$$

なので,

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

を得る. まとめてベクトルで書くと,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta - gt \end{pmatrix}$$

となる.

- (2-5) 運動方程式の各成分をもう一回積分することにより, 物体の位置ベクトルを時間の関数として表せ.

速度の x 成分を積分して

$$x = \int v_x dt = v_0 t \cos \theta + C$$

となる. $t = 0$ で $x = 0$ より, $C = 0$ なので,

$$x = v_0 t \cos \theta$$

を得る. 速度の y 成分を積分して

$$y = \int v_y dt = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + D$$

となる. $t = 0$ で $y = 0$ より, $D = 0$ なので,

$$y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2$$

を得る. まとめてベクトルで書くと,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} v_0 t \cos \theta \\ v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

となる.

- (2-6) 地上に落下する時間と, 水平到達距離を求めよ.

地上に落下したとき $y = 0$ なので,

$$y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 = t(2v_0 \sin \theta - g t) = 0$$

より,

$$t = \boxed{2v_0 \sin \theta / g}$$

を得る. そのとき,

$$x = v_0(2v_0 \sin \theta / g) \cos \theta = \boxed{v_0^2 \sin 2\theta / g}$$

(2-7) 水平到達距離を最大にする発射角度 θ を求めよ.

$\sin 2\theta$ を最大とする θ は $\boxed{\theta = 45^\circ}$