基礎力学演習　第１回　運動のベクトル表示

2018 年 9 月 21 日　　担当：佐藤 純

問題 1 xy-平面内を原点 $(0,0)$ を中心に左回りに等速円運動する物体を考える．
円運動の半径を r, 角速度を ω とする．

(1-1) 初期時刻 $t=0$ において物体は $(x,y)=(r,0)$ にあるとする．
時刻 t における物体の位置ベクトル $\vec{r}(t)$, 速度ベクトル $\vec{v}(t)$, 加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ を求めよ．

$$\vec{r}(t) = r\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = r\omega\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = -r\omega^2\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}$$

(1-2) 位置ベクトルと速度ベクトルは常に直交していることを示せ．

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = r^2\omega\Big\{\cos\omega t(-\sin\omega t) + \sin\omega t\cos\omega t\Big\} = 0$$

(1-3) 加速度ベクトルは，常に「物体から原点に向かう向き」にあることを示せ．

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

(1-4) 速度ベクトルの大きさ $v=|\vec{v}|$ と加速度ベクトルの大きさ $a=|\vec{a}|$ を，r, ω を用いて表せ．

$$v = r\omega, \quad a = r\omega^2$$

問題 2 xy-平面内における物体の運動を，極座標で記述することを考える．
時刻 t における物体の位置の xy-座標を (x,y)，極座標を (r,θ) とする．

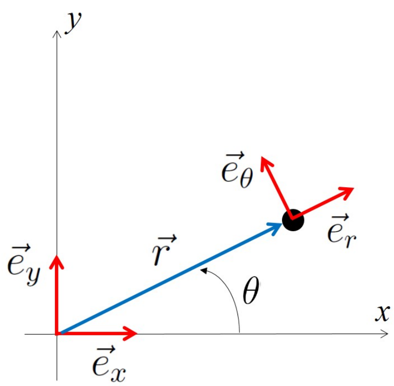
(2-1) (x,y) を (r,θ) の式で表せ．

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

(2-2) $\left(\dfrac{\partial x}{\partial r}, \dfrac{\partial y}{\partial r}\right)$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}_r$，$\left(\dfrac{\partial x}{\partial \theta}, \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\right)$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}_\theta$ を求めよ．

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

(2-3) 前問で求めた $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ を極座標における (物体とともに動く) 基本ベクトルと定める．それに対し，xy-座標における (動かない) 基本ベクトルを $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ を原点を始点として，$\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ を物体の位置を始点として図示せよ．



(2-4) 時刻 t における物体の位置ベクトル

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

は，極座標を用いると

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

と書けることを示せ．

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = r\vec{e}_r$$

(2-5) 時刻 t における物体の速度ベクトル

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

は，極座標を用いると

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

と書けることを示せ．

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta} \\ \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta} \end{pmatrix} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

(2-6) 同様に，物体の加速度ベクトル

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$$

は，極座標を用いると

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

と書けることを示せ．

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \begin{pmatrix} \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\sin\theta\dot{\theta} - \dot{r}\sin\theta\dot{\theta} - r\cos\theta\dot{\theta}^2 - r\sin\theta\ddot{\theta} \\ \ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\cos\theta\dot{\theta} + \dot{r}\cos\theta\dot{\theta} + r\sin\theta\dot{\theta}^2 + r\cos\theta\ddot{\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\sin\theta \\ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

(2-7) 角速度 ω の等速円運動の場合に，具体的に $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ の極座標表示を計算し，問題 **(1-2)**～**(1-4)** の事実を確認せよ．

等速円運動のとき，$\dot{r} = \ddot{r} = 0$, $\theta = \omega t$, $\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = 0$ より，

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad \vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = -r\omega^2\vec{e}_r$$

となる．まず，$\vec{e}_r \perp \vec{e}_\theta$ より，$\vec{r} \perp \vec{v}$ が直ちに導かれる．(1-3),(1-4) の事実は極座標表示においては自明となる．