

# 基礎力学演習 第1回 運動のベクトル表示

2019年9月27日 担当：佐藤 純

**問題1**  $xy$ -平面内を原点  $(0,0)$  を中心に左回りに等速円運動する物体を考える。  
円運動の半径を  $r$ , 角速度を  $\omega$  とする。

- (1-1) 初期時刻  $t=0$  において物体は  $(x,y) = (r,0)$  にあるとする。  
時刻  $t$  における物体の位置ベクトル  $\vec{r}(t)$ , 速度ベクトル  $\vec{v}(t)$ , 加速度ベクトル  $\vec{a}(t)$  を求めよ。
- (1-2) 位置ベクトルと速度ベクトルは常に直交していることを示せ。
- (1-3) 加速度ベクトルは, 常に「物体から原点に向かう向き」にあることを示せ。
- (1-4) 速度ベクトルの大きさ  $v = |\vec{v}|$  と加速度ベクトルの大きさ  $a = |\vec{a}|$  を,  $r, \omega$  を用いて表せ。

**問題2**  $xy$ -平面内における物体の運動を, 極座標で記述することを考える。  
時刻  $t$  における物体の位置の  $xy$ -座標を  $(x,y)$ , 極座標を  $(r,\theta)$  とする。

- (2-1)  $(x,y)$  を  $(r,\theta)$  の式で表せ。
- (2-2)  $\left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}\right)$  方向の単位ベクトル  $\vec{e}_r$ ,  $\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}\right)$  方向の単位ベクトル  $\vec{e}_\theta$  を求めよ。
- (2-3) 前問で求めた  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  を極座標における (物体とともに動く) 基本ベクトルと定める。  
それに対し,  $xy$ -座標における (動かない) 基本ベクトルを  $\vec{e}_x = (1,0), \vec{e}_y = (0,1)$  とする。  
 $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  を原点を始点として,  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  を物体の位置を始点として図示せよ。
- (2-4) 時刻  $t$  における物体の位置ベクトル

$$\vec{r} = (x,y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

は, 極座標を用いると

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

と書けることを示せ。

- (2-5) 時刻  $t$  における物体の速度ベクトル

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

は, 極座標を用いると

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

と書けることを示せ。

- (2-6) 同様に, 物体の加速度ベクトル

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$$

は, 極座標を用いると

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

と書けることを示せ。

- (2-7) 角速度  $\omega$  の等速円運動の場合に, 具体的に  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$  の極座標表示を計算し, 問題 (1-2)~(1-4) の事実を確認せよ。