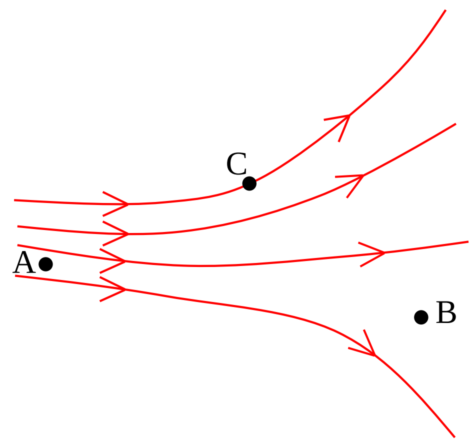
物理学概論 B　期末試験

2020 年 1 月 28 日　担当：佐藤 純

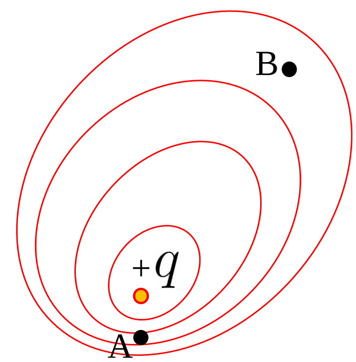
$\boxed{\text{問題 1}}$ 右図は電気力線を表している．



(1-1) A 地点と B 地点のどちらが電場が強いか．理由とともに答えよ．

(1-2) C 地点に負電荷を置いたとき，働く力の方向を解答用紙の図に書き込め

$\boxed{\text{問題 2}}$ 右図は等電位線を表している．



(2-1) A 地点と B 地点のどちらが電場が強いか．理由とともに答えよ．

(2-2) A 地点の電場の方向を，解答用紙の図に書き込め．

$\boxed{\text{問題 3}}$ 全ての電磁気現象は下記の Maxwell 方程式 (ア)〜(エ) によって記述される．
以下の現象を記述する Maxwell 方程式を，(ア)〜(エ) から選べ．

(3-1) 電荷の周りには電場が発生する．

(3-2) コイルの中で棒磁石を動かすと，誘導起電力が生じる (ファラデーの電磁誘導の法則)．

(3-3) 電荷と電荷の間には，その距離の 2 乗に反比例する力が働く (クーロンの法則)．

(3-4) 電荷に相当する「磁荷」は存在せず，磁場に湧き出しはない．

(3-5) 電流の周りには磁場が発生する (アンペールの法則)．

(3-6) 電場の湧き出しは電荷密度に比例する．

$$
\begin{cases}
\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (\text{ア}) \\
\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 & (\text{イ}) \\
\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\partial_t \vec{B} & (\text{ウ}) \\
\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D} & (\text{エ})
\end{cases}
$$

問題 4 原点に電荷 q があるとき，位置 $\vec{r}=(x,y,z)$ の地点には

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}$$

の電場が発生する．ただし，$r=|\vec{r}|$ は原点からの距離を表す．

(4-1) なぜ比例定数に $\dfrac{1}{4\pi}$ を含めるのか，簡単に説明せよ．

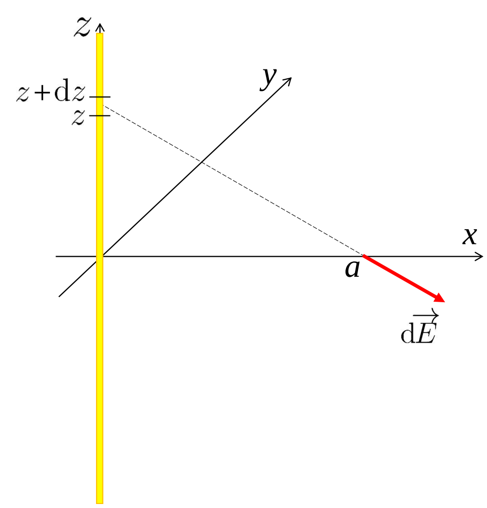
(4-2) クーロンの法則によれば，電場の大きさは距離の 2 乗に反比例するが，上式分母は r^3 となっている．なぜ 2 乗ではなく 3 乗なのか，簡単に説明せよ．

(4-3) 電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は電位 $\phi(\vec{r})=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ を使って

$$\vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\phi$$

と書けることを示せ．ただし，$\vec{\nabla}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

問題 5 z 軸上に線密度 ρ の線電荷が，$-\infty<z<\infty$ に一様に分布している．この線電荷が作る電場を調べる．



(5-1) 線電荷の微小部分 $z\ \sim\ z+\mathrm{d}z$ が点 $(a,0,0)$ に作る電場 $\mathrm{d}\vec{E}$ を求めよ．

(5-2) 線電荷全体が点 $(a,0,0)$ に作る電場 $\vec{E}$ を求めよ．ただし，$z=a\tan\theta$ として，θ で積分せよ．

(5-3) ガウスの法則を用いて，より簡潔に電場を求めよ．

問題 6 $(0,0,-d/2)$ に電荷 $-q$，$(0,0,+d/2)$ に電荷 $+q$ がある．

(6-1) 負電荷から正電荷に向かうベクトル $\vec{p}=q\vec{d}=q(0,0,d)$ のことを何というか．

(6-2) 縦軸を電位 $\phi(0,0,z)$，横軸を位置 z として，グラフの概形を描け．

(6-3) 場所 $\vec{r}=(x,0,z)$ における電場を求めよ．ただし，$x,z\gg d$ として計算せよ．

問題 7 断面積 S，長さ ℓ の金属線に電圧 V をかけたら，電流 I が流れた．これを，「古典的」な電子の運動で調べる．電子の電荷を e (符号は気にしなくてよい)，電子の数密度 (単位体積当たりにある電子の数) を n とする．

(7-1) 「古典的」とはどういう意味か．簡単に述べよ．

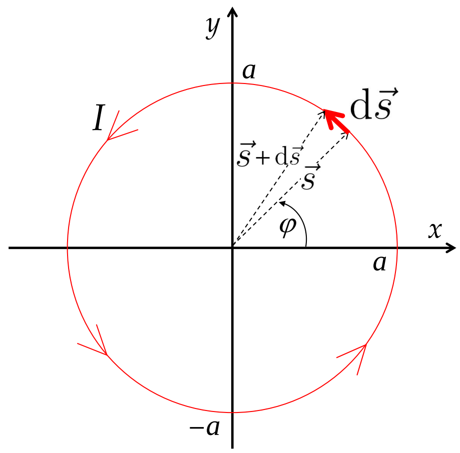
(7-2) 全ての電子がいっせいに同じ速度 v で運動しているとして，I を S,v,n,e の式で表せ．

(7-3) 衝突によって速度がゼロになった電子は，電場 $E=V/\ell$ によって $F=eE=eV/\ell$ の力を受け，等加速度 $a=F/m=\dfrac{eV}{\ell m}$ で，衝突までの時間 τ の間に $v_{\max}=2v=a\tau$ まで加速し，再び衝突して速度ゼロになることを繰り返すとする．
オームの法則 $V=IR$ が成り立つことを示し，抵抗 R は金属線の長さに比例し，断面積に反比例することを示せ．

(7-4) 単位時間あたりに衝突によって失われる運動エネルギーを計算し，発生するジュール熱の式 IV に等しいことを示せ．

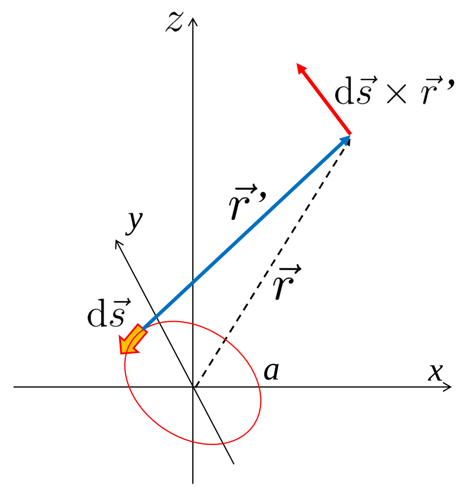
$\boxed{\text{問題 8}}$ 以下の空欄に当てはまる数式，語句を答えよ．

ビオ・サバールの法則により，円電流が作る磁場を計算する．xy 平面に原点を中心とする半径 a の円電流 I が左回りに流れているとする．円電流上の点を $\vec{s} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ と表し，$\varphi \sim \varphi + \mathrm{d}\varphi$ の微小部分の電流素辺 $\mathrm{d}\vec{s}$ が場所 $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ に作る磁場 $\mathrm{d}\vec{H}$ を計算する．



電流素辺の位置 $\vec{s}$ から場所 $\vec{r}$ へ向かうベクトルを $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{s}$ とすると，ビオ・サバールの法則は

$\mathrm{d}\vec{H} = \dfrac{I}{4\pi r'^3}\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r'}$ で与えられる．



$\mathrm{d}\vec{s}$ と $\vec{r'}$ を具体的に書くと

$\mathrm{d}\vec{s} = \boxed{\begin{pmatrix} (\text{ア}) \end{pmatrix}}$, $\quad \vec{r'} = \boxed{\begin{pmatrix} (\text{イ}) \end{pmatrix}}$ となる．

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + z^2}$ として $a \ll x, z, r$ を使うと $(r')^{-3} \sim \dfrac{1}{r^3}\left(1 + \dfrac{3ax}{r^2}\cos\varphi\right)$ より，

$$\mathrm{d}\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3}\left(1 + \frac{3ax}{r^2}\cos\varphi\right)\boxed{\begin{pmatrix} (\text{ア}) \end{pmatrix}} \times \boxed{\begin{pmatrix} (\text{イ}) \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{I}{4\pi r^3}\left(1 + \frac{3ax}{r^2}\cos\varphi\right) a \boxed{\begin{pmatrix} (\text{ウ}) \end{pmatrix}} \mathrm{d}\varphi$$

を得る．これを円電流 1 周にわたって足し合わせると，

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{3ax}{r^2}\cos\varphi\right) a \boxed{\begin{pmatrix} (\text{ウ}) \end{pmatrix}} \mathrm{d}\varphi$$

となるが，

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \boxed{(\text{エ})}$, $\quad \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = \boxed{(\text{オ})}$, $\quad \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi = \boxed{(\text{カ})}$,

に注意すると，

$$\vec{H} = \boxed{\begin{pmatrix} (\text{キ}) \end{pmatrix}}$$

となり，$\boxed{(\text{ク})}$ が作る磁場に一致する．すなわち棒磁石は円電流と等価であると言える．