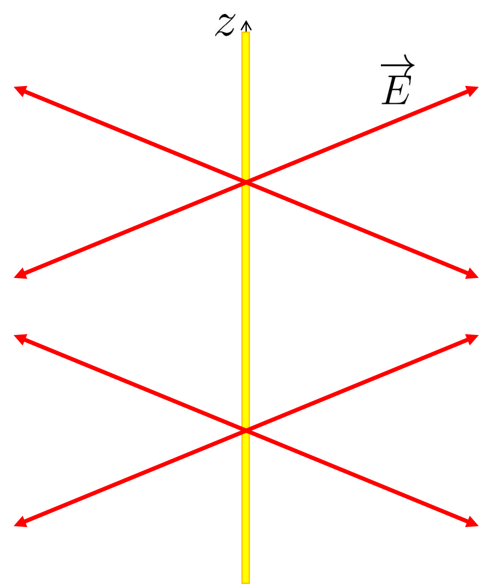
物理学概論B　演習問題 解答

2019年度後期　担当：佐藤 純

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ z 軸上に線密度 ρ の線電荷が，$-\infty < z < \infty$ に一様に分布している．この線電荷が作る電場を調べる．



(1-1) 線電荷の微小部分 $z \sim z + \mathrm{d}z$ が点 $(a, 0, 0)$ に作る電場 $\mathrm{d}\vec{E}$ を求めよ．

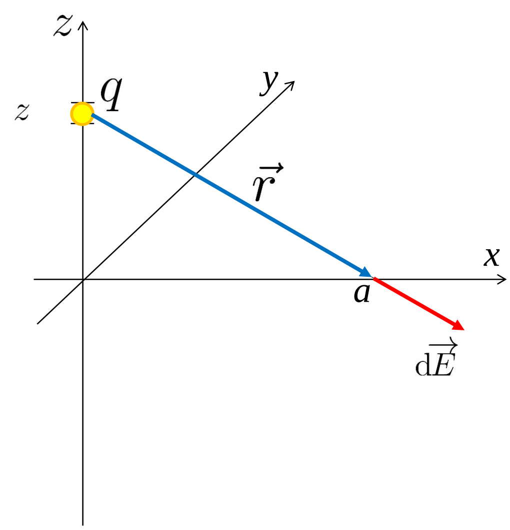
$z \sim z + \mathrm{d}z$ の部分にある電荷 q は，線密度 ρ に長さ $\mathrm{d}z$ をかけて $q = \rho \mathrm{d}z$ となる．したがって，点 $(0, 0, z)$ に点電荷 $q = \rho\mathrm{d}z$ があるとして，点 $(a, 0, 0)$ に作る電場を求めればよい．点 $(0, 0, z)$ から点 $(a, 0, 0)$ に向かうベクトルを $\vec{r}$ とすると，
$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}$，$r = \sqrt{a^2 + z^2}$ となるので，
これと $q = \rho\mathrm{d}z$ を

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}$$

に代入して，

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\rho\mathrm{d}z}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}$$

となる．



(1-2) 線電荷全体が点 $(a, 0, 0)$ に作る電場 $\vec{E}$ を求めよ．ただし，$z = a\tan\theta$ として，θ で積分せよ．

上で求めた電場を $-\infty < z < \infty$ で全て足し合わせて，

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho \mathrm{d}z}{4\pi\epsilon_0 (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}$$

となる．ここで，

$$z = a \tan\theta$$

と変数変換をすると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z = a(\tan\theta)'\mathrm{d}\theta &= a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)'\mathrm{d}\theta \\
&= a\left[\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)' + (\sin\theta)'\frac{1}{\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\
&= a\left[\sin\theta\left(-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(\cos\theta)' + \cos\theta\frac{1}{\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\
&= a\left[\sin\theta\left(-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(-\sin\theta) + 1\right]\mathrm{d}\theta \\
&= a\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1\right)\mathrm{d}\theta = a\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

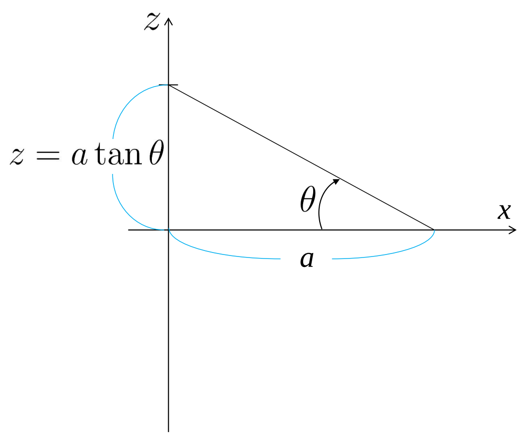
である．また，

$$a^2 + z^2 = a^2 + a^2\tan^2\theta = a^2\left[1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2\right] = a^2\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{a^2}{\cos^2\theta}$$

より

$$\frac{1}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = (a^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\cos^3\theta}{a^3}$$

である．$\theta : -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$ のとき $\tan\theta : -\infty \to +\infty$



に注意して，

$$\vec{E} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos^3\theta}{a^3}\frac{a}{\cos^2\theta}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a\tan\theta \end{pmatrix}\mathrm{d}\theta$$

$$
= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan\theta \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta
$$

$$
= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 a}\left[\begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 a}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 a}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}
$$

を得る．

(1-3) ガウスの法則を用いて，より簡潔に電場を求めよ．

対称性から明らかに，電場は z 軸から放射状に広がる．したがって，z 軸を中心軸とする円柱で取り囲むと，電場は円柱の側面を常に垂直に貫く．

閉曲面 S を半径 a，高さ ℓ の円柱として，ガウスの法則

$$
\int_S \overrightarrow{E} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \frac{Q}{\epsilon_0}
$$

を適用する．z 軸から距離 a だけ離れた点の電場の強さを $E(a)$ とする．ガウスの法則の左辺は，円柱側面での電場の強さ $E(a)$ に，円柱の側面積をかけて

$$
\int_S \overrightarrow{E} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = E(a) 2\pi a \ell
$$

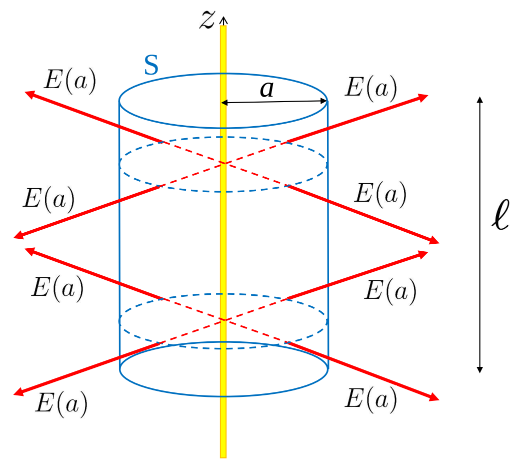
となる．円柱 S 内の全電荷 Q は，線密度 ρ に円柱内の線電荷の長さ ℓ をかけて，$Q = \rho\ell$ となる．したがって

$$
E(a) 2\pi a \ell = \frac{\rho\ell}{\epsilon_0}
$$

より，

$$
\boxed{E(a) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 a}}
$$

を得る．



問題 2 x 軸原点に電荷 q がある．この電荷が周囲に作る電場と電位を，テスト電荷 q' を使って調べる．

(2-1) テスト電荷 q' を位置 $x (> 0)$ においたとき，テスト電荷が原点の電荷 q から受ける力 $F(x)$ を求めよ．

クーロンの法則により，

$$\boxed{F(x) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 x^2}}$$

となる．

(2-2) 前問で求めた力をテスト電荷 q' で割ったもの $E(x) = F(x)/q'$ を “電場” と呼ぶ．原点の電荷 q が位置 x に作る電場 $E(x)$ を求めよ．

$$\boxed{E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}}$$

(2-3) テスト電荷 q' を，電場の影響が及ばない遠方 $(x = +\infty)$ から，$x = a$ まで運んでくるのに必要な仕事 $W(+\infty \to a)$ を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

クーロン力 $F(x)$ に逆らって電荷 q' を手で押す力は $-F(x)$ である．電荷を運ぶ全経路を微小区間に分割し，各微小区間での仕事を全て足し合わせて全仕事を求める．微小区間 x から $x + \mathrm{d}x$ まで運ぶのに必要な仕事 $W(x \to x + \mathrm{d}x)$ は，力 $-F(x)$ に移動距離 $\mathrm{d}x$ をかけて，$-F(x)\mathrm{d}x$ となる．これを，$x = +\infty$ から $x = a$ まで全て足し合わせて，

$$\begin{aligned} W(+\infty \to a) &= \int_{+\infty}^{a} \{-F(x)\}\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^{a} \left\{-\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 x^2}\right\}\mathrm{d}x = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\int_{+\infty}^{a}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x}\right]_{+\infty}^{a} = \boxed{\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 a}} \end{aligned}$$

となる．

(2-4) このとき，テスト電荷は仕事をされることによって，ポテンシャルエネルギーを蓄える．位置 x におけるポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ．

電場の影響が及ばない無限遠でのポテンシャルをゼロとする：$U(+\infty) = 0$．そこから位置 x まで，電場に逆らってテスト電荷を運んでやると，その際に受け取った仕事の分だけポテンシャルエネルギーが増える．すなわち，

$$U(x) = W(+\infty \to x) = \boxed{\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 x}}$$

(2-5) 前問で求めたポテンシャルエネルギーを，テスト電荷 q' で割ったもの $\phi(x) = U(x)/q'$ を “電位” と呼ぶ．原点の電荷 q が位置 x に作る電位 $\phi(x)$ を求めよ．

$$\boxed{\phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}}$$

(2-6) 位置 x における電場 $E(x)$ は，電位 $\phi(x)$ を微分することによって

$$E(x) = -\phi'(x)$$

と書けることを確認せよ．

$$-\phi'(x) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} = E(x)$$

(2-7) 同様にして，3 次元の場合には，$\vec{r}$ の位置における電位 $\phi(\vec{r})$ は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

と書ける．ただし，$r = |\vec{r}|$ は原点からの距離を表す．

$\vec{r}$ の位置における電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi$$

と書けることを示せ．ただし，

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \qquad \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

である．

$\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．

まず，以下の微分式が成り立つことに注意．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}-1}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2) \\
&= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r},
\end{aligned}$$

同様に $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$ が成り立つ．これを用いて，

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

同様に，$\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{y}{r^3}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{z}{r^3}$ を得る．以上により，

$$-\vec{\nabla}\phi = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{pmatrix} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{r} \end{pmatrix} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} -\dfrac{x}{r^3} \\ -\dfrac{y}{r^3} \\ -\dfrac{z}{r^3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r} = \vec{E}.$$

を得る.

問題 3 原点にある電気双極子 $\vec{p} = q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$ が，場所 $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ に作る電場を求めよ.
(z 軸回りの回転対称性から，$y = 0$ としても一般性を失わない)
ただし，$(0, 0, -d/2)$ に電荷 $-q$，$(0, 0, +d/2)$ に電荷 $+q$ があるとし，
$x, y, z \gg d$ として計算せよ.

スカラーである電位は，ベクトルである電場よりも計算しやすい.
したがって，まず電位を求めた後，それを微分することによって電場を求める.
電荷 q から距離 r だけ離れた点の電位は $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ なので，正負の電荷が作る電位を重ね合わせて，

$$\phi(x, 0, z) = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + (z - d/2)^2}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + (z + d/2)^2}}$$

となる．ここで，正負の電荷から $\vec{r}$ までの距離を

$$r_\pm := \sqrt{x^2 + (z \mp d/2)^2}$$

と書くと，

$$\phi(x, 0, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(r_+^{-1} - r_-^{-1})$$

となる．$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + z^2}$ として，$x, y, z \gg d$ を使って計算すると，

$$r_\pm = \{x^2 + (z \mp d/2)^2\}^{\frac{1}{2}} \simeq \{x^2 + z^2 \mp zd\}^{\frac{1}{2}} = r\left(1 \mp \frac{zd}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq r\left(1 \mp \frac{zd}{2r^2}\right),$$
$$r_\pm^{-1} \simeq r^{-1}\left(1 \pm \frac{zd}{2r^2}\right)$$

となる．ただし，十分小さい ϵ に対し，$(1 + \epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$ が成り立つことを使った.
以上により，電位が

$$\phi(x, 0, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[r^{-1}\left(1 + \frac{zd}{2r^2}\right) - r^{-1}\left(1 - \frac{zd}{2r^2}\right)\right] = \frac{qzd}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{z}{r^3}$$

と求まる．電場はこれを微分して

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}z\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}z\frac{-3}{r^4}\frac{x}{r} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3xz}{r^5},$$
$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0,$$
$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} + z\frac{-3}{r^4}\frac{z}{r}\right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{2z^2 - x^2}{r^5}$$

となる．

$$\boxed{\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^5}\begin{pmatrix} 3xz \\ 0 \\ 2z^2 - x^2 \end{pmatrix}}$$

問題 4 断面積 S，長さ ℓ の金属線に電圧 V をかけたら，電流 I が流れた．通常はオームの法則が成り立ち，電流の大きさは電圧に比例する．すなわち，電気抵抗を R として，$V = IR$ が成り立つ．これを微視的な理論に基づいて説明することは大変に困難である．ここでは，古典的な電子の運動で大雑把に調べてみる．電子の電荷を e (符号は気にしなくてよい)，電子の数密度 (単位体積当たりにある電子の数) を n とする．

(4-1) 一辺 $2\mathring{A}$ の立方体に 1 つの電子があるとして，n の値を見積もれ．

$$n = \frac{1}{(2\times 10^{-10}[\mathrm{m}])^3} \sim 10^{29}[\mathrm{m}^{-3}]$$

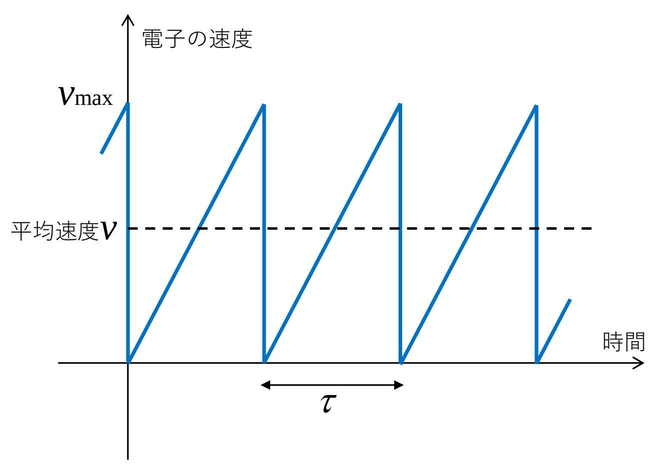
(4-2) $S = 1[\mathrm{mm}^2]$，$I = 1[\mathrm{A}]$ とする．全ての電子がいっせいに同じ速度 v で運動しているとして，v の値を見積もれ．ただし，$e = 1.6\times 10^{-19}[\mathrm{C}]$ とする．

電流 $I =$ 金属線のある地点を単位時間に通過する電荷量
$=$ 金属線の長さ v の部分の中にある電子の数 $\times$ 電子ひとつの電荷
$=$ (電子数密度 $\times$ 金属線の長さ v の部分の体積)$\times$ 電子ひとつの電荷
$= (n\times vS)\times e$
より，

$$\begin{aligned} v = \frac{I}{nSe} &= \frac{1[\mathrm{A}]}{(10^{29}[\mathrm{m}^{-3}])\,(10^{-6}[\mathrm{m}^2])\,(1.6\times 10^{-19}[\mathrm{C}])} \\ &= \frac{1}{10^{29}\times 10^{-6}\times 1.6\times 10^{-19}}[\mathrm{m/s}] \\ &= \frac{1}{1.6\times 10^4}[\mathrm{m/s}] \sim 6\times 10^{-5}[\mathrm{m/s}] = \boxed{0.06[\mathrm{mm/s}]} \end{aligned}$$

電子は 1 秒間にたった 0.06mm しか動かない．

(4-3) 以下の古典的な描像で考える．原子核に衝突して速度 $v = 0$ となった電子は，電場によって等加速度運動をした後，最高速度 $v = v_{\max}$ に達し，再び衝突して $v = 0$ となることを繰り返す．前問で求めた v は電子全体の平均速度であり，$v = v_{\max}/2$ とする．$\ell = 10\mathrm{cm}$，$V = 1[\mathrm{mV}]$，電子の質量を $m = 9\times 10^{-31}[\mathrm{kg}]$ として，電子の加速度 a と，電子が衝突するまでの時間 τ の値を見積もれ．



電位差 $V =$ 電場の強さ $E\times$ 金属線の長さ ℓ
なので，$E = V/\ell$ である．電子が受ける力 F は電場の強さに電荷をかけて，

$F = eE = eV/\ell$ となる．したがって電子の加速度は $a = F/m = \dfrac{eV}{\ell m}$ となるので，$\tau = v_{\max}/a = 2v/a = \dfrac{2v\ell m}{eV}$ を得る．
数値を代入して値を見積もると，$\boxed{a = 2 \times 10^9 [\mathrm{m/s^2}]}$ $\boxed{\tau = 6 \times 10^{-14} [\mathrm{s}]}$ となる．
1 秒で光速を超えるほどの加速度であるが，ごく短時間で衝突するために 1 秒で 0.06mm しか動けない．

(4-4) オームの法則 $V = IR$ が成り立つことを示し，抵抗 R は金属線の長さに比例し，断面積に反比例することを示せ．

前問の結果 $\tau = \dfrac{2v\ell m}{eV}$ に $v = \dfrac{I}{nSe}$ を代入して v を消去すると，

$$\tau = \frac{2\ell m}{eV} \cdot \frac{I}{nSe},$$

より

$$V = IR, \qquad R = \frac{\ell}{S} \cdot \frac{2m}{\tau n e^2}$$

を得る．R は ℓ に比例し，S に反比例している．

$$\rho := \frac{2m}{\tau n e^2}$$

は金属線の形状によらない，金属に固有の定数となり，比抵抗と呼ばれる．

(4-5) 単位時間あたりに衝突によって失われる運動エネルギーを計算し，発生するジュール熱の式 IV に等しいことを示せ．

電子 1 個が 1 回の衝突で失う運動エネルギーは，$\dfrac{1}{2} m v_{\max}^2 = 2mv^2$ である．単位時間に衝突する回数は τ^{-1} 回であり，電子は全部で $\ell S n$ 個あるので，金属線内全体で単位時間に失う運動エネルギーは，

$$\tau^{-1}(\ell S n)(2mv^2) = \frac{eV}{2v\ell m}(\ell S n)(2mv^2) = eVSnv = eVSn \cdot \frac{I}{nSe} = IV$$

となる．

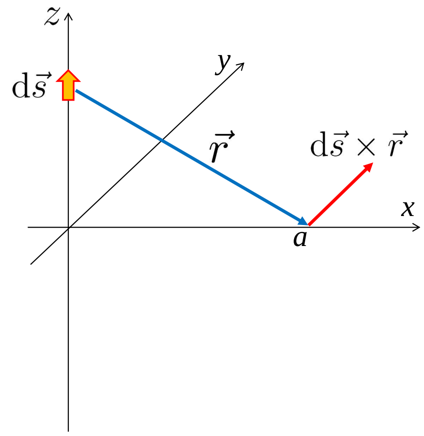
問題 5 無限に長い直線電流が周囲に作る磁場を，ビオ・サバールの法則

$$\mathrm{d}\overrightarrow{H} = \frac{I}{4\pi r^3} \mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}$$

を用いて計算せよ．

z 軸に沿って，z 軸正の向きに電流が流れているとする．z 軸まわりに回転対称性があるので，x 軸上の点 $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ での磁場を求める（一般性を失わない）．

$z \sim z+\mathrm{d}z$ の微小部分の電流素辺 $\mathrm{d}\vec{s} = \begin{pmatrix}0\\0\\\mathrm{d}z\end{pmatrix}$ が，場所 $\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$ に作る磁場を求める．電流素辺の位置 $\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}$ から場所 $\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$ へ向かうベクトルを $\vec{r}$ とすると，$\vec{r} = \begin{pmatrix}a\\0\\-z\end{pmatrix}$ より，



$$\mathrm{d}\vec{H} = \frac{I}{4\pi(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}0\\0\\\mathrm{d}z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a\\0\\-z\end{pmatrix} = \frac{I}{4\pi(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}0\\a\mathrm{d}z\\0\end{pmatrix}$$

となる．これを $-\infty < z < +\infty$ で足し合わせて，

$$\vec{H} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I}{4\pi(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}0\\a\mathrm{d}z\\0\end{pmatrix} = \frac{aI}{4\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

となる．ここで，$z = a\tan\theta$ と変数変換すると，$\mathrm{d}z = \dfrac{a}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta,\ a^2+z^2 = \dfrac{a^2}{\cos^2\theta}$ より，

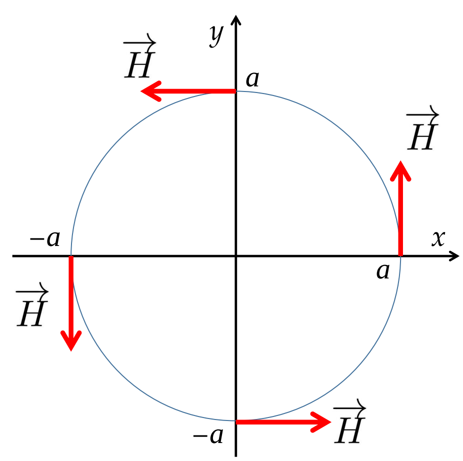
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^3\theta}{a^3}\frac{a}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{a^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{a^2}$$

と計算できる．したがって，

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi a}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

を得る．

z 軸まわりの回転対称性により，同様に $\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$ には磁場 $\vec{H} = \dfrac{I}{2\pi a}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ が，$\begin{pmatrix}-a\\0\\0\end{pmatrix}$ には磁場 $\vec{H} = \dfrac{I}{2\pi a}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ が，$\begin{pmatrix}0\\-a\\0\end{pmatrix}$ には磁場 $\vec{H} = \dfrac{I}{2\pi a}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ が発生する．



すなわち，直線電流のまわりには，電流の方向右回りに円状の磁場が発生し，その

大きさ H は電流からの距離を a とすると，

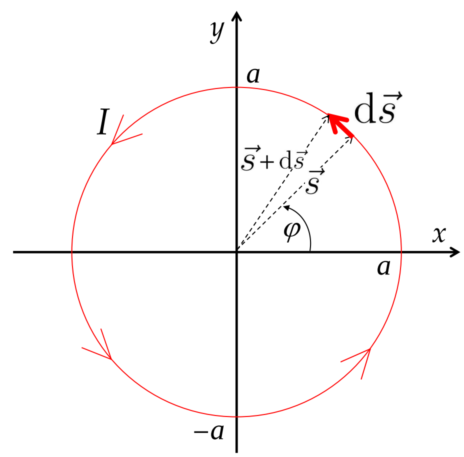
$$H = \frac{I}{2\pi a}$$

で与えられる．

問題 6 半径 a の円電流 I が作る磁場は，磁気双極子 $p_m = \mu_0 IS$ ($S = \pi a^2$: 円の面積) が作る磁場と等価であることを示せ．

ビオ・サバールの法則により，円電流が作る磁場を計算する．

xy 平面に原点を中心とする半径 a の円電流 I が左回りに流れているとする．円電流上の点を $\vec{s} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ と表し，$\varphi \sim \varphi + \mathrm{d}\varphi$ の微小部分の電流素辺 $\mathrm{d}\vec{s}$ が，場所 $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ に作る磁場を計算する．
(z 軸回りの回転対称性から，$y = 0$ としても一般性を失わない)．



電流素辺の位置 $\vec{s}$ から場所 $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ へ向かうベクトルを $\vec{r'}$ とする．ビオ・サバールの法則

$$\mathrm{d}\vec{H} = \frac{I}{4\pi r'^3} \mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r'}$$

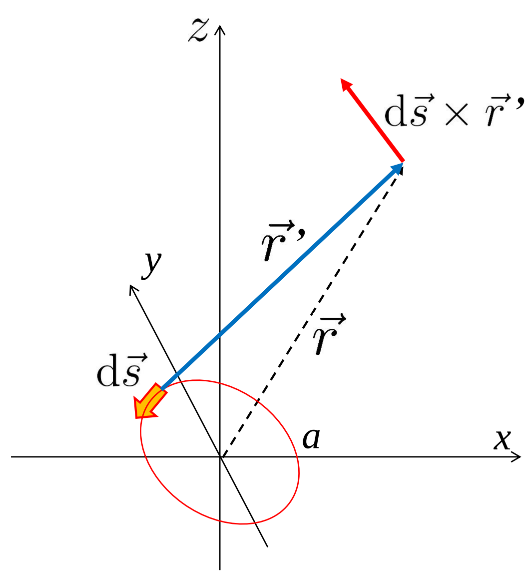
における $\mathrm{d}\vec{s}$ と $\vec{r'}$ は

$$\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = a\mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

および

$$\vec{r'} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

で与えられる．



また，$a \ll x, z, r$ とすると，

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + z^2},$$
$$r' = |\vec{r'}| = \sqrt{(x - a\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2 + z^2}$$
$$= \sqrt{r^2 - 2ax\cos\varphi + a^2} \sim \sqrt{r^2 - 2ax\cos\varphi} = r\left(1 - \frac{2ax}{r^2}\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(r')^{-3} = r^{-3}\left(1 - \frac{2ax}{r^2}\cos\varphi\right)^{-\frac{3}{2}} \sim \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3ax}{r^2}\cos\varphi\right)$$

と計算される．以上により，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\overrightarrow{H} &= \frac{I}{4\pi r^3}\left(1 + \frac{3ax}{r^2}\cos\varphi\right) a\mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - a\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \\
&= \frac{Ia\mathrm{d}\varphi}{4\pi r^3}\left(1 + \frac{3ax}{r^2}\cos\varphi\right) \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ a - x\cos\varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を得る．これを円電流 1 周にわたって足し合わせると，

$$\overrightarrow{H} = \int_0^{2\pi} \frac{Ia\mathrm{d}\varphi}{4\pi r^3}\left(1 + \frac{3ax}{r^2}\cos\varphi\right) \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ a - x\cos\varphi \end{pmatrix}$$

となるが，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi \mathrm{d}\varphi = 0, \\
&\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi = \pi
\end{aligned}$$

に注意すると，

$$\overrightarrow{H} = \frac{Ia}{4\pi r^3}\begin{pmatrix} z\dfrac{3ax}{r^2}\pi \\ 0 \\ 2\pi a - x\dfrac{3ax}{r^2}\pi \end{pmatrix} = \frac{I\pi a^2}{4\pi r^5}\begin{pmatrix} 3xz \\ 0 \\ 2r^2 - 3x^2 \end{pmatrix} = \frac{p_m}{4\pi\mu_0 r^5}\begin{pmatrix} 3xz \\ 0 \\ 2z^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

となり，**問題 3** で求めた双極子が作る場に一致する．