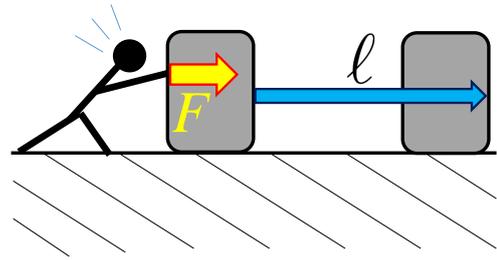


1 仕事

- 力の方向と物体の移動方向が同じとき

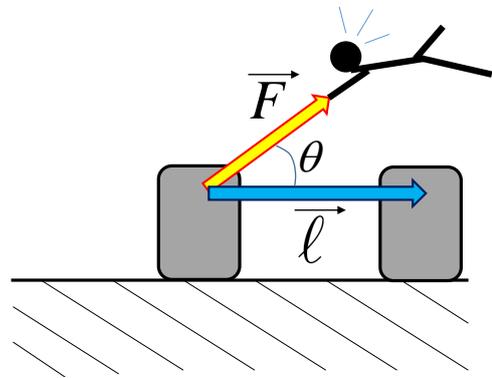
$$\begin{aligned} \text{仕事} &= \text{力} \times \text{移動距離} \\ W &= F\ell \end{aligned}$$



- 力の方向と物体の移動方向が異なるとき

加えた力 \vec{F} は、水平方向 $F \cos \theta$ と垂直方向 $F \sin \theta$ に分解されるが、物体の移動に実際に使われる成分は $F \cos \theta$ だけである。したがって、人間がした仕事量を $W = (F \cos \theta)\ell$ で定める。これは、力ベクトル \vec{F} と変位ベクトル $\vec{\ell}$ の内積 $W = \vec{F} \cdot \vec{\ell}$ である。

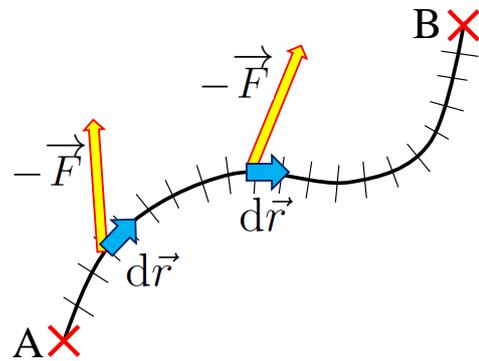
$$\begin{aligned} \text{仕事} &= \vec{\text{力}} \cdot \vec{\text{変位}} \\ W &= \vec{F} \cdot \vec{\ell} \end{aligned}$$



2 仕事と線積分

3次元空間中を、外力を受けながら運動する物体を考える。場所 \vec{r} において、物体は外力 $\vec{F}(\vec{r})$ を受けるとする。この外力に逆らって、場所 A から B まで物体を運んだとき、人間がした仕事 W を計算しよう。

物体を運んだ経路を C とする。この経路を細かく分割し、微小な一つの区間に注目する。



この区間における物体の微小変位ベクトルを $d\vec{r}$ とする。外力 $\vec{F}(\vec{r})$ に逆らって人間が加えた力は $-\vec{F}(\vec{r})$ であるから、この微小区間でした仕事は $-\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ である。この微小な仕事を全経路 C で全て足し合わせることで、全体の仕事は

$$W(A \rightarrow B|C) = \int_C -\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (2.1)$$

と求まる。この経路 C に沿った積分を線積分という。

3 ポテンシャルエネルギー

場所 A から B まで外力 $\vec{F}(\vec{r})$ に逆らって人間が物体を運んだとき、

$$W(A \rightarrow B) = \int_C -\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (3.1)$$

だけ人間は仕事をしたことになる。外力 $\vec{F}(\vec{r})$ が保存力のとき、この仕事量は経路 C によらず、A と B だけから決まる。

物体はこれだけの仕事を人間から受け取ったことにより、エネルギーを獲得することになる。たとえば場所 B で物体は静止していたとしても、A にいた時よりも (目に見えない形で) エネルギーが上昇している。これを、ポテンシャル (潜在的な) エネルギーという。

場所 \vec{r} におけるポテンシャルエネルギーを $U(\vec{r})$ とすると、

$$U(B) - U(A) = W(A \rightarrow B) \quad (3.2)$$

となる。このように、ポテンシャルエネルギーはある地点と別の地点の「差」しか求まらない。そこで、どこかを基準点と定め (どこでもよい)、そこでのポテンシャルをゼロと決める。すなわち、基準点を \vec{a} として、 $U(\vec{a}) = 0$ とする。すると、場所 \vec{r} におけるポテンシャルエネルギーは、

$$U(\vec{r}) = W(\vec{a} \rightarrow \vec{r}) \quad (3.3)$$

で求まることになる。すなわち、場所 \vec{r} におけるポテンシャルエネルギーを求めるには、基準点からその場所まで運ぶのに必要な仕事を計算すればよいことになる。

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{a} \rightarrow \vec{r}} -\vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

4 電位

電場 $\vec{E}(\vec{r})$ 中の単位電荷 $q = 1$ が感じるポテンシャルを電位という。すなわち、場所 \vec{r} における電位は

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{a} \rightarrow \vec{r}} -\vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

で定められる。ただし、基準点を \vec{a} とした。