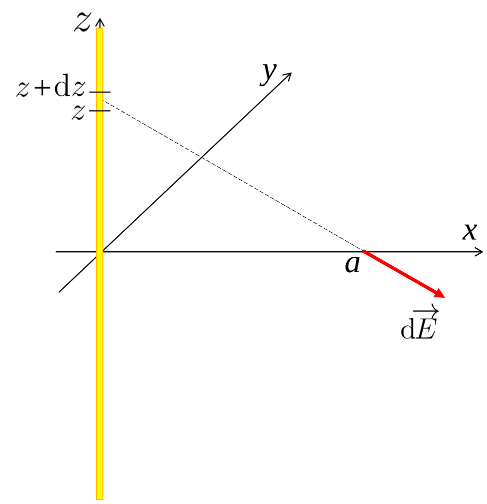
物理学概論B　演習問題

2019年度後期　担当：佐藤 純

問題1 z 軸上に線密度 ρ の線電荷が，$-\infty < z < \infty$ に一様に分布している．この線電荷が作る電場を調べる．



(1-1) 線電荷の微小部分 $z \sim z + \mathrm{d}z$ が点 $(a, 0, 0)$ に作る電場 $\mathrm{d}\vec{E}$ を求めよ．

(1-2) 線電荷全体が点 $(a, 0, 0)$ に作る電場 $\vec{E}$ を求めよ．ただし，$z = a\tan\theta$ として，θ で積分せよ．

(1-3) ガウスの法則を用いて，より簡潔に電場を求めよ．

問題2 x 軸原点に電荷 q がある．この電荷が周囲に作る電場と電位を，テスト電荷 q' を使って調べる．

(2-1) テスト電荷 q' を位置 $x(>0)$ においたとき，テスト電荷が原点の電荷 q から受ける力 $F(x)$ を求めよ．

(2-2) 前問で求めた力をテスト電荷 q' で割ったもの $E(x) = F(x)/q'$ を "電場" と呼ぶ．原点の電荷 q が位置 x に作る電場 $E(x)$ を求めよ．

(2-3) テスト電荷 q' を，電場の影響が及ばない遠方 $(x = +\infty)$ から，$x = a$ まで運んでくるのに必要な仕事 $W(+\infty \to a)$ を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(2-4) このとき，テスト電荷は仕事をされることによって，ポテンシャルエネルギーを蓄える．位置 x におけるポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ．

(2-5) 前問で求めたポテンシャルエネルギーを，テスト電荷 q' で割ったもの $\phi(x) = U(x)/q'$ を "電位" と呼ぶ．原点の電荷 q が位置 x に作る電位 $\phi(x)$ を求めよ．

(2-6) 位置 x における電場 $E(x)$ は，電位 $\phi(x)$ を微分することによって

$$E(x) = -\phi'(x)$$

と書けることを確認せよ．

(2-7) 同様にして，3次元の場合には，$\vec{r}$ の位置における電位 $\phi(\vec{r})$ は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

と書ける．ただし，$r = |\vec{r}|$ は原点からの距離を表す．

$\vec{r}$ の位置における電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi$$

と書けることを示せ．ただし，

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \qquad \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

である．

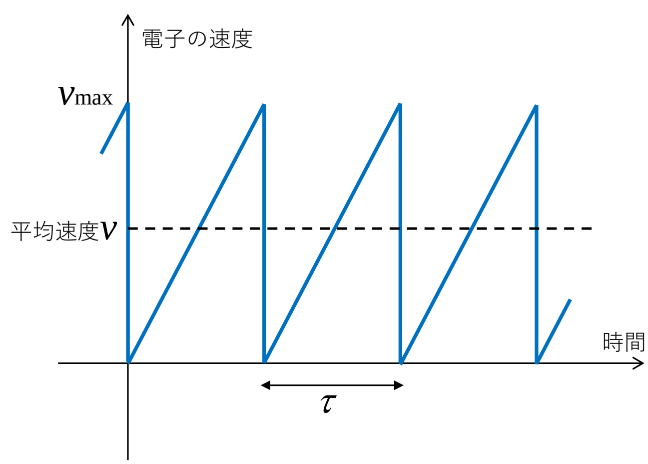
問題 3 原点にある電気双極子 $\vec{p} = q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$ が，場所 $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ に作る電場を求めよ．
(z 軸回りの回転対称性から，$y=0$ としても一般性を失わない)
ただし，$(0,0,-d/2)$ に電荷 $-q$，$(0,0,+d/2)$ に電荷 $+q$ があるとし，
$x, y, z \gg d$ として計算せよ．

問題 4 断面積 S，長さ ℓ の金属線に電圧 V をかけたら，電流 I が流れた．通常はオームの法則が成り立ち，電流の大きさは電圧に比例する．すなわち，電気抵抗を R として，$V = IR$ が成り立つ．これを微視的な理論に基づいて説明することは大変に困難である．ここでは，古典的な電子の運動で大雑把に調べてみる．電子の電荷を e (符号は気にしなくてよい)，電子の数密度 (単位体積当たりにある電子の数) を n とする．

(4-1) 一辺 $2\mathring{A}$ の立方体に 1 つの電子があるとして，n の値を見積もれ．

(4-2) $S = 1[\mathrm{mm}^2]$，$I = 1[\mathrm{A}]$ とする．全ての電子がいっせいに同じ速度 v で運動しているとして，v の値を見積もれ．ただし，$e = 1.6 \times 10^{-19}[\mathrm{C}]$ とする．

(4-3) 以下の古典的な描像で考える．原子核に衝突して速度 $v = 0$ となった電子は，電場によって等加速度運動をした後，最高速度 $v = v_{\max}$ に達し，再び衝突して $v = 0$ となることを繰り返す．前問で求めた v は電子全体の平均速度であり，$v = v_{\max}/2$ とする．$\ell = 10\mathrm{cm}$，$V = 1[\mathrm{mV}]$，電子の質量を $m = 9 \times 10^{-31}[\mathrm{kg}]$ として，電子の加速度 a と，電子が衝突するまでの時間 τ の値を見積もれ．



(4-4) オームの法則 $V = IR$ が成り立つことを示し，抵抗 R は金属線の長さに比例し，断面積に反比例することを示せ．

(4-5) 単位時間あたりに衝突によって失われる運動エネルギーを計算し，発生するジュール熱の式 IV に等しいことを示せ．

$\boxed{\textbf{問題 5}}$ 無限に長い直線電流が周囲に作る磁場を，ビオ・サバールの法則

$$\mathrm{d}\overrightarrow{H} = \frac{I}{4\pi r^3}\mathrm{d}s \times \vec{r}$$

を用いて計算せよ．

$\boxed{\textbf{問題 6}}$ 半径 a の円電流 I が作る磁場は，磁気双極子 $p_m = \mu_0 IS$ ($S = \pi a^2$: 円の面積) が作る磁場と等価であることを示せ．