

# 物理学入門 第1回 初等関数とその微積分

2019年4月12日 担当：佐藤 純

**問題1** 以下の  $x$  を  $t$  で微分し、 $\dot{x}$  ( $= \frac{dx}{dt}$ ) を求めよ。ただし、 $a, b, A, \omega, \delta$  は正の定数とする。

(1-1)  $x = (at + b)^7$                       (1-2)  $x = \frac{1}{at + b}$                       (1-3)  $x = A \sin(\omega t + \delta)$

(1-4)  $x = Ae^{-at}$                       (1-5)  $x = Ae^{-at} \sin \omega t$                       (1-6)  $x = \log(at + b)$

**問題2** 以下の積分を計算せよ。ただし、 $a, b, A, \omega, \delta$  は正の定数とする。

(2-1)  $\int (at + b)^7 dt$                       (2-2)  $\int \frac{dt}{at + b}$                       (2-3)  $\int \frac{dt}{(at + b)^2}$

(2-4)  $\int A \sin(\omega t + \delta) dt$                       (2-5)  $\int Ae^{-at} dt$                       (2-6)  $\int Ae^{-at} \sin \omega t dt$

**問題3** オイラーの公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  を使って、加法定理

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad \text{を示せ.}$$

**問題4** (4-1)  $x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$  のグラフを、 $-T < t < T$  の範囲で描け。ただし、 $A, T$  は正の定数とし、座標軸とグラフの交点および極大極小点の座標を全て書き込むこと。

(4-2)  $y = 2^x$  と  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  のグラフを描け。これらのグラフはどのような関係にあるか。

(4-3)  $y = e^x$  と  $y = \log_e x$  のグラフを描け。これらのグラフはどのような関係にあるか。

**問題5** 以下の式を、 $A \sin(x + \alpha)$  の形に表せ。

(5-1)  $\sin x + \cos x$                       (5-2)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x$                       (5-3)  $\sqrt{2} \sin x - \sqrt{6} \cos x$

**問題6**  $t = \tan \frac{x}{2}$  のとき、 $\sin x, \cos x, \tan x$  を  $t$  の式で表せ。

**問題7** (7-1)  $x, y, z$  を正の実数とし、 $x, z$  は1でないとする。 $\log_x y = \frac{\log_z y}{\log_z x}$  を示せ。

(7-2)  $\log_{24} 75$  を  $a = \log_{10} 2, b = \log_{10} 3$  を用いて表せ。

**問題8** ドラえもんの道具に、栗饅頭の数か5分で2倍になるバイバインという道具がある。

(8-1) 栗饅頭を直径3cmの球、宇宙を直径300億光年の球とすると、宇宙の体積は栗饅頭の体積の何倍となるか？ただし、1光年は10兆kmである。

(8-2) 最初に栗饅頭が一個あったとして、バイバインを使うとおよそどのくらいの時間の後に、栗饅頭の体積が宇宙の体積を超えるか？ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010 \dots$  を使ってよい。